MATHÉMATIQUES

Courbe de Lorenz et indice de Gini

Terminale maths complémentaires

Répartition des richesses • Médiane, quartiles, déciles • Rapport interdécile • Courbe de Lorenz
Fonction convexe • Première bissectrice • Indice de Gini • $G = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x$

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), thème d'étude « Répartition des richesses, inégalités ». Il couvre :

- statistique descriptive : médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile ;
- courbe de Lorenz sur des données : définition, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, lecture, interprétation ;
- modélisation par une fonction continue, croissante, convexe de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$, de points fixes 0 et 1 ; position par rapport à la première bissectrice ;
- indice de Gini : définition, calcul, interprétation ; comparaison de répartitions.

Contenus mobilisés : fonctions, convexité (chapitre « Fonctions convexes »), calcul intégral (chapitre « Calcul intégral »).

Objectif : mesurer les inégalités d'une répartition (salaires, revenus, patrimoines) à l'aide des déciles, de la courbe de Lorenz et de l'indice de Gini, calculé par une intégrale.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Mesurer la dispersion : les quantiles **3**

2 La courbe de Lorenz **4**

3 L'indice de Gini **5**

4 Erreurs classiques **6**

5 Fiche de synthèse **6**

6 Exercices d'application **6**

7 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Mesurer la dispersion : les quantiles

Médiane, quartiles, déciles

Les valeurs étant rangées par ordre croissant :

- la **médiane** partage la population en deux moitiés ;
- le premier **quartile** Q_1 est la plus petite valeur telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales ; de même Q_3 avec 75 % ;
- les **déciles** $D_1, \dots, D_9$ découpent la population en dix tranches : au moins 10 % des valeurs sont inférieures ou égales à D_1, au moins 90 % à D_9.

Rapport interdécile

Le **rapport interdécile** $\dfrac{D_9}{D_1}$ compare le seuil des 10 % les plus riches à celui des 10 % les plus pauvres. Plus il est grand, plus les écarts sont importants. Il ne dit rien, en revanche, de ce qui se passe **au-dessus** de D_9 : il ignore les très hauts revenus.

Les salaires d'une petite entreprise

Les dix salariés d'une entreprise gagnent (en euros par mois, rangés) : 1 400 ; 1 500 ; 1 600 ; 1 700 ; 1 800 ; 2 000 ; 2 200 ; 2 600 ; 3 200 ; 6 000. Masse salariale : 24 000 € ; moyenne : 2 400 € ; médiane : $\frac{1\,800+2\,000}{2} = 1\,900$ € ; $D_1 = 1\,400$, $D_9 = 3\,200$, rapport interdécile $\frac{3\,200}{1\,400} \approx 2{,}3$. La moyenne dépasse nettement la médiane, signe de quelques salaires élevés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. La courbe de Lorenz

Courbe de Lorenz

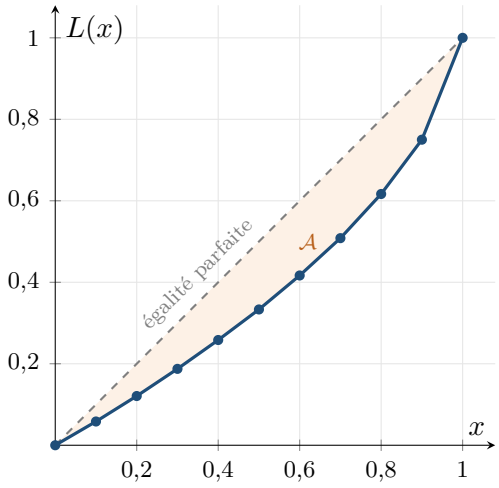
On range les individus du plus pauvre au plus riche. Pour chaque proportion x de la population (les $x \times 100\,\%$ les plus pauvres), on note $L(x)$ la proportion de la richesse totale qu'ils détiennent. La **courbe de Lorenz** est la courbe de L sur $[0\,;1]$. Sur des données, on place les points $(x_i\,;L(x_i))$ pour les quantiles et on les relie par une **ligne polygonale**.

Construction pour l'entreprise

Cumul des salaires rangés, divisé par 24 000 :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$L(x)$	0	0,058	0,121	0,188	0,258	0,333	0,417	0,508	0,617	0,75	1

Lecture : les 50 % de salariés les moins payés touchent 33,3 % de la masse salariale ; le salarié le mieux payé (10 % de l'effectif) en touche 25 %.



Courbe de Lorenz des salaires (polygone bleu) et première bissectrice. L'aire $\mathcal{A}$ entre les deux mesure l'inégalité.

Propriétés d'une courbe de Lorenz

La fonction L est définie de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ et :

- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$: 0 et 1 sont des **points fixes** ;
- L est **croissante** : en ajoutant des individus, on ajoute de la richesse ;
- L est **convexe** : on ajoute les individus du plus pauvre au plus riche, donc la pente (la part apportée par chaque nouvel individu) augmente ;
- par convexité, la courbe est sous sa corde, qui joint $(0\,;0)$ à $(1\,;1)$: $\boxed{L(x) \leq x}$. Elle est sous la **première bissectrice**.

Les deux cas extrêmes

- **Égalité parfaite** : tous ont la même richesse, $L(x) = x$ (la bissectrice).
- **Inégalité maximale** : un seul individu possède tout ; $L(x) = 0$ sauf tout à la fin, où la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

courbe remonte à 1.

Plus la courbe s'éloigne de la bissectrice, plus la répartition est inégale.

Modéliser une courbe de Lorenz

La fonction $L(x) = \dfrac{x+x^3}{2}$ est-elle une courbe de Lorenz ? $L(0) = 0$, $L(1) = 1$; $L'(x) = \dfrac{1+3x^2}{2} > 0$, donc L est croissante et prend ses valeurs dans $[0\,;1]$; $L''(x) = 3x \geq 0$ sur $[0\,;1]$, donc L est convexe. Oui, elle convient. Les 50 % les plus pauvres détiennent $L(0{,}5) = 0{,}3125$, soit 31,25 % du total.

3. L'indice de Gini

Indice de Gini

L'**indice de Gini** est le double de l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la bissectrice et la courbe de Lorenz :

$$\boxed{G = 2\int_0^1 \big(x - L(x)\big)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Comme $0 \leq L(x) \leq x$, l'aire $\mathcal{A}$ est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$ (aire du triangle sous la bissectrice), donc $\boxed{0 \leq G \leq 1}$: $G = 0$ pour l'égalité parfaite, G proche de 1 pour une inégalité extrême.

Avec un modèle

- $L(x) = x^2$: $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, donc $G = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.
- $L(x) = \frac{x+x^3}{2}$: $\int_0^1 L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$, donc $G = 1 - \frac{3}{4} = 0{,}25$.
- $L(x) = x^3$: $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, donc $G = \frac{1}{2}$: plus inégal.

Indice de Gini d'une ligne polygonale

L'aire sous la ligne polygonale se calcule par la **méthode des trapèzes** : entre deux points consécutifs $(x_i\,;L_i)$ et $(x_{i+1}\,;L_{i+1})$, l'aire vaut $(x_{i+1} - x_i)\dfrac{L_i + L_{i+1}}{2}$. On additionne, puis $G = 1 - 2 \times$ aire.

Gini de l'entreprise

Avec des tranches de largeur 0,1, l'aire sous la ligne polygonale est

$$0{,}1 \times \left(\frac{0+1}{2} + 0{,}0583 + 0{,}1208 + \cdots + 0{,}75\right) = 0{,}1 \times (0{,}5 + 3{,}25) = 0{,}375,$$

d'où $G = 1 - 2 \times 0{,}375 = 0{,}25$.

Revenus par quintiles

Dans un pays, les cinq quintiles de la population (du plus pauvre au plus riche) reçoivent 8 %, 13 %, 17 %, 23 % et 39 % du revenu total. Cumuls : 0,08 ; 0,21 ; 0,38 ; 0,61 ; 1. Aire par les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

trapèzes : $0{,}2 \times \frac{(0+0{,}08)+(0{,}08+0{,}21)+(0{,}21+0{,}38)+(0{,}38+0{,}61)+(0{,}61+1)}{2} = 0{,}356$, donc $G \approx 0{,}288$.

Ordres de grandeur et limites

L'indice de Gini des niveaux de vie est d'environ 0,3 en France, plus faible dans les pays scandinaves et supérieur à 0,6 dans les pays les plus inégalitaires. Les patrimoines sont bien plus inégalement répartis que les revenus. Un même indice peut correspondre à deux courbes de Lorenz différentes (qui se croisent) : un seul nombre ne résume pas toute une répartition, d'où l'intérêt de regarder aussi les déciles et la courbe elle-même. On compare aussi l'évolution de l'indice dans le temps, ou avant et après impôts et prestations sociales (effet de la redistribution).

4. Erreurs classiques

À éviter

- Ranger les individus du plus riche au plus pauvre : la courbe obtenue serait au-dessus de la bissectrice (concave).
- Oublier le facteur 2 : $G = 2\mathcal{A}$, pas $\mathcal{A}$.
- Confondre « part de la population » (en abscisse) et « part de la richesse » (en ordonnée) à la lecture.
- Proposer comme modèle une fonction non convexe ou qui ne vérifie pas $L(1) = 1$.
- Croire que le rapport interdécile et l'indice de Gini disent la même chose.

5. Fiche de synthèse

Quantiles	médiane, Q_1, Q_3, déciles ; rapport interdécile $\frac{D_9}{D_1}$
Lorenz	$L(x)$ = part de la richesse des $x \times 100\,\%$ les plus pauvres
Propriétés	$L(0) = 0$, $L(1) = 1$, croissante, convexe, $L(x) \leq x$
Égalité	$L(x) = x$ (bissectrice), $G = 0$
Gini	$G = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x = 1 - 2\int_0^1 L$; $0 \leq G \leq 1$
Données	aire sous le polygone par les trapèzes, puis $G = 1 - 2 \times$ aire

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Un modèle

Soit $L(x) = 0{,}2x + 0{,}8x^3$ sur $[0\,;1]$.

1. Vérifier que L peut modéliser une courbe de Lorenz.
2. Quelle part du revenu détiennent les 50 % les plus pauvres ?
3. Calculer l'indice de Gini.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Comparer deux pays

Dans le pays B, les quintiles reçoivent 5 %, 10 %, 15 %, 25 % et 45 % du revenu. Calculer l'indice de Gini (polygone) et le comparer à celui du pays de l'exemple ($G \approx 0{,}288$).

Exercice 3 – Interprétation

Après impôts et prestations sociales, l'indice de Gini d'un pays passe de 0,45 à 0,30. Interpréter.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. 1. $L(0) = 0$, $L(1) = 0{,}2 + 0{,}8 = 1$; $L'(x) = 0{,}2 + 2{,}4x^2 > 0$: croissante, donc à valeurs dans $[0\,;1]$; $L''(x) = 4{,}8x \geq 0$: convexe. 2. $L(0{,}5) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$: 20 % du revenu. 3. $\int_0^1 L = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$, donc $G = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. Cumuls : 0,05 ; 0,15 ; 0,30 ; 0,55 ; 1. Aire $= 0{,}2 \times \frac{0{,}05+0{,}20+0{,}45+0{,}85+1{,}55}{2} = 0{,}31$, donc $G = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$. Le pays B est plus inégalitaire ($0{,}38 > 0{,}288$).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. La redistribution rapproche la courbe de Lorenz de la bissectrice : l'aire entre les deux passe de 0,225 à 0,15. Les revenus disponibles sont nettement moins inégaux que les revenus initiaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).