MATHÉMATIQUES

Dérivation et étude de fonctions

Terminale maths complémentaires

$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ • $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ • $(u^2)' = 2uu'$
Tableau de variation • Extremums • Tangente • Optimisation • Coût marginal • Coût moyen

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique », et le thème d'étude « Modèles définis par une fonction d'une variable ». Il couvre :

- fonctions dérivées de $x \mapsto f(ax+b)$, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, $x \mapsto \ln u(x)$ et $x \mapsto u(x)^2$;
- calcul de dérivées et de limites ; tableau de variation ; extremums ;
- modèles géométriques, physiques, biologiques et économiques (coût total, coût marginal, coût moyen) ;
- **démonstration** : dérivée de $\ln u$ et de $\exp u$.

Prérequis (première) : dérivées des fonctions de référence, d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; équation de tangente.

Objectif : calculer la dérivée de fonctions composées simples, dresser un tableau de variation complet et résoudre des problèmes d'optimisation issus de la géométrie, de la biologie ou de l'économie.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Rappels de première **3**

2 Dérivées de fonctions composées **3**

3 Étudier une fonction **4**

4 Optimisation **5**

5 Erreurs classiques **6**

6 Fiche de synthèse **6**

7 Exercices d'application **7**

8 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Rappels de première

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
x^n $(n \geq 1)$	nx^{n-1}	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Opérations : $(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Dérivée et variations

Sur un intervalle : si $f' > 0$ (sauf en des points isolés), f est strictement croissante ; si $f' < 0$, strictement décroissante. Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, f admet un extremum local en a. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

2. Dérivées de fonctions composées

Les quatre formules du programme

Pour des fonctions u dérivables (et $u > 0$ pour le logarithme) :

$$\boxed{(f(ax+b))' = a\,f'(ax+b)} \qquad \boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u} \qquad \boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}} \qquad \boxed{(u^2)' = 2u\,u'}$$

Démonstration.

— $(u^2)' = (u \times u)' = u'u + uu' = 2uu'$ (dérivée d'un produit).

— On admet la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ (dérivée d'une fonction composée). On en déduit celle du logarithme : la fonction $h = \ln u$ vérifie $\mathrm{e}^h = u$. En dérivant les deux membres, $h'\,\mathrm{e}^h = u'$, soit $h' \times u = u'$, donc $h' = \dfrac{u'}{u}$.

Composée affine $f(ax+b)$

— $(3x-1)^5$ a pour dérivée $3 \times 5(3x-1)^4 = 15(3x-1)^4$.

— $\sqrt{2x+1}$ (pour $x > -\frac{1}{2}$) a pour dérivée $2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

— $\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ a pour dérivée $-0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$; $\ln(4-x)$ a pour dérivée $\dfrac{-1}{4-x}$.

Exponentielle, logarithme et carré d'une fonction

— $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x}$: $u = x^2 - 3x$, $u' = 2x - 3$, donc $f'(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{x^2-3x}$.

— $g(x) = \ln(x^2+1)$: $u = x^2 + 1 > 0$, donc $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $h(x) = (x^2 - 4x)^2$: $h'(x) = 2(x^2 - 4x)(2x - 4)$.

Tangente

$f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$: $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1}$. Au point d'abscisse $\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, d'où la tangente $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 = 2x$, qui passe par l'origine.

Le facteur oublié

La dérivée de e^u n'est pas e^u, et celle de $\ln u$ n'est pas $\frac{1}{u}$: il manque u'. Contrôle rapide : $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)' = 3\mathrm{e}^{3x}$, pas e^{3x}.

3. Étudier une fonction

Plan d'étude

1. Préciser l'ensemble de définition (dénominateur non nul, racine d'un nombre positif, logarithme d'un nombre strictement positif).
2. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme **factorisée**.
3. Étudier le signe de $f'(x)$: $\mathrm{e}^u > 0$ ne compte pas ; un carré est positif ; on fait un tableau de signes pour un produit ou un quotient.
4. Dresser le tableau de variation avec les limites aux bornes et les valeurs des extremums.

Étude de $f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-x}$

Produit avec $u = 2x - 1$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$: $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - (2x - 1)\mathrm{e}^{-x} = (3 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$, du signe de $3 - 2x$.

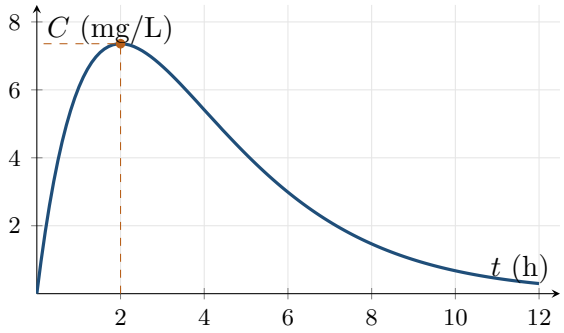
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2\mathrm{e}^{-1,5}$	↘	0

En $-\infty$: $2x - 1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$. En $+\infty$, on admet que $f(x) \to 0$ (l'exponentielle l'emporte). Maximum $f(1{,}5) = 2\mathrm{e}^{-1,5} \approx 0{,}446$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration (en mg/L) vaut $C(t) = 10\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, t en heures. $C'(t) = 10\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 10t \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t)$. C croît sur $[0\,;2]$ puis décroît : le pic est atteint après 2 h, $C(2) = 20\,\mathrm{e}^{-1} \approx 7{,}36$ mg/L.



Le pic de concentration : $C(2) \approx 7{,}36$ mg/L.

4. Optimisation

Résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable et son intervalle de valeurs possibles.
2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de cette variable.
3. Étudier les variations : l'extremum est atteint là où la dérivée change de signe (ou à une borne).
4. Conclure **dans le contexte**, avec une unité.

La boîte de volume maximal

Dans un carré de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x, puis on plie pour obtenir une boîte sans couvercle. Pour $x \in [0\,;15]$: $V(x) = x(30-2x)^2$. Avec $(u^2)' = 2uu'$:

$$V'(x) = (30-2x)^2 + x \times 2(30-2x)(-2) = (30-2x)(30-2x-4x) = (30-2x)(30-6x).$$

Sur $[0\,;15]$, $30 - 2x \geq 0$: V' est du signe de $30-6x$, positive avant 5, négative après. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm : $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm^3.

Coût total, coût marginal, coût moyen

Si $C(q)$ est le coût de production de q unités :

- le **coût marginal** $C_m(q) = C'(q)$ approche le coût de production d'une unité supplémentaire ;
- le **coût moyen** est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, coût d'une unité en moyenne ;
- le **bénéfice** est $B(q) = R(q) - C(q)$, où $R(q)$ est la recette.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Minimiser le coût moyen

$C(q) = q^2 + 20q + 900$ (en euros), $q > 0$. $C_M(q) = q + 20 + \dfrac{900}{q}$ et $C_M'(q) = 1 - \dfrac{900}{q^2} = \dfrac{(q-30)(q+30)}{q^2}$. Le coût moyen est minimal pour $q = 30$: $C_M(30) = 30 + 20 + 30 = 80$ €. On remarque que $C_m(30) = 2 \times 30 + 20 = 80$ € : au minimum du coût moyen, coût marginal et coût moyen sont égaux (résultat classique en économie).

Maximiser le bénéfice

Une entreprise vend q tonnes ($q \in [0\,;15]$) à 120 milliers d'euros la tonne ; le coût est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 200$. Le bénéfice $B(q) = 120q - C(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 200$ a pour dérivée $B'(q) = -3q^2 + 24q + 60 = -3(q-10)(q+2)$, positive sur $[0\,;10[$, négative sur $]10\,;15]$. Bénéfice maximal pour $q = 10$ tonnes : $B(10) = 600$ milliers d'euros.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier le facteur a ou u' : $(\ln(5x))' = \dfrac{5}{5x} = \dfrac{1}{x}$, pas $\dfrac{1}{5x}$.
- Développer $f'(x)$ au lieu de la factoriser : le signe se lit sur une forme factorisée.
- Étudier le signe de e^{-x} : il est toujours strictement positif.
- Donner un extremum sans vérifier que la dérivée change de signe, ou oublier de comparer avec les bornes de l'intervalle.
- Confondre coût marginal ($C'(q)$) et coût moyen ($\frac{C(q)}{q}$).

6. Fiche de synthèse

Composées	$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(u^2)' = 2uu'$
Opérations	$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Variations	$f' > 0$: croissante ; $f' < 0$: décroissante ; extremum si f' change de signe
Tangente	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$
Économie	$C_m = C'$; $C_M = \frac{C}{q}$; $B = R - C$
Optimiser	variable et intervalle, fonction, dérivée factorisée, tableau, conclusion avec unité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Dérivées

Dériver : a) $f(x) = (4x+3)^3$; b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; c) $h(x) = \ln(2x+5)$ sur $\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$; d) $k(x) = (\mathrm{e}^x-1)^2$.

Exercice 2 – Étude

Soit $f(x) = \ln(3x+1) - x$ sur $[0\,;10]$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2-3x}{3x+1}$, puis dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3 – Maximum

Étudier les variations de $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $[0\,;+\infty[$ et donner son maximum.

Exercice 4 – Enclos

Un éleveur dispose de 60 m de grillage pour clore un enclos rectangulaire adossé à un mur (le côté du mur n'est pas grillagé). On note x la largeur perpendiculaire au mur. Exprimer l'aire $A(x)$, puis déterminer les dimensions qui la rendent maximale.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $f'(x) = 4 \times 3(4x+3)^2 = 12(4x+3)^2$. b) $g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. c) $h'(x) = \dfrac{2}{2x+5}$. d) $k'(x) = 2(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = \dfrac{3}{3x+1} - 1 = \dfrac{3-(3x+1)}{3x+1} = \dfrac{2-3x}{3x+1}$. Sur $[0\,;10]$, $3x+1>0$: f' est du signe de $2-3x$. f croît sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{2}{3}\,;10\right]$; maximum $f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 3 - \frac{2}{3} \approx 0{,}432$; $f(0) = 0$ et $f(10) = \ln 31 - 10 \approx -6{,}57$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $g'(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$, du signe de $1-2x$. g croît sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, décroît ensuite : maximum $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}184$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. Le côté parallèle au mur mesure $60-2x$, avec $x \in [0\,;30]$. $A(x) = x(60-2x) = 60x-2x^2$ et $A'(x) = 60-4x$, positive avant 15, négative après. Aire maximale pour $x = 15$ m : enclos de 15 m sur 30 m, aire 450 m^2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).