MATHÉMATIQUES

Fonction logarithme népérien

Terminale maths complémentaires

Logarithme népérien • $\mathrm{e}^x = a \iff x = \ln a$ • $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ • $\ln(q^n) = n \ln q$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ • Limites • Seuil • Demi-vie • Neper et Briggs

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », et le thème d'étude « Approche historique de la fonction logarithme ». Il couvre :

- fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle ; limites, représentation graphique ;
- équation fonctionnelle $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et ses conséquences ; fonction dérivée ;
- résolution d'équations et d'inéquations ; relation $\ln(q^n) = n \ln q$ pour déterminer un seuil ;
- **démonstrations** : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, dérivée de $\ln$;
- **algorithmes** : algorithme de Briggs, valeur approchée de $\ln 2$ par dichotomie.

Prérequis : fonction exponentielle (première), fonction réciproque (chapitre « Limites, continuité »).

Objectif : définir le logarithme népérien comme réciproque de l'exponentielle, utiliser son équation fonctionnelle pour transformer une écriture et résoudre équations, inéquations et problèmes de seuil.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Définition **3**

2 L'équation fonctionnelle et ses conséquences **3**

3 Étude de la fonction ln **5**

4 Équations, inéquations et seuils **5**

5 Approche historique **6**

6 Erreurs classiques **7**

7 Fiche de synthèse **7**

8 Exercices d'application **7**

9 Corrigés des exercices **8**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Définition

Logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a donc une **unique** solution, notée $\ln a$. La fonction $\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est la **réciproque** de l'exponentielle :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = a \iff x = \ln a \qquad (a > 0)}$$

Valeurs et relations immédiates

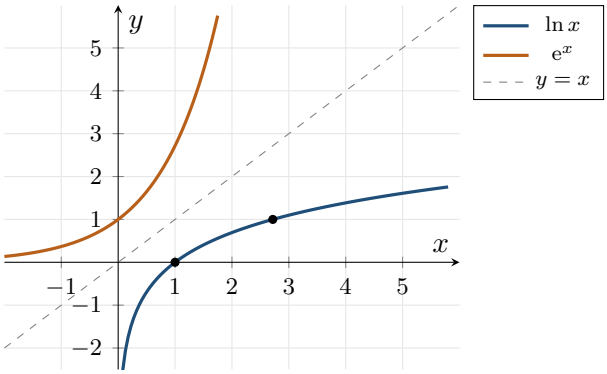
$\ln 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$) ; $\ln \mathrm{e} = 1$; pour tout $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln a} = a$; pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

Sens de variation et signe

ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad\qquad \ln a < \ln b \iff a < b.$$

En particulier $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$, $\ln x = 0$ si $x = 1$ et $\ln x > 0$ si $x > 1$.



La courbe de ln passe par $(1\,;0)$ et $(\mathrm{e}\,;1)$; elle est symétrique de celle de exp par rapport à la droite $y = x$.

2. L'équation fonctionnelle et ses conséquences

Équation fonctionnelle

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

Le logarithme transforme les **produits en sommes**.

Démonstration. $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = a \times b$. Donc $\ln a + \ln b$ est la solution de l'équation $\mathrm{e}^x = ab$, c'est-à-dire $\ln(ab)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conséquences

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier relatif :

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln a \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \boxed{\ln(a^n) = n\ln a} \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a.$$

Démonstration. $\ln a + \ln\frac{1}{a} = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$, d'où $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$. Puis $\ln\frac{a}{b} = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$. Pour $n \geq 1$, $\ln(a^n) = \ln a + \cdots + \ln a$ (n termes) $= n\ln a$. Enfin $2\ln\sqrt{a} = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = \ln a$.

Transformer une écriture

— $\ln 50 - \ln 2 = \ln 25 = \ln(5^2) = 2\ln 5$.

— $\ln(\mathrm{e}^3) + \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 3 - 1 = 2$.

— $\ln 8 + \ln\dfrac{1}{4} = 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 2$.

— $A = \ln(x^2-1) - \ln(x+1) = \ln\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \ln(x-1)$ pour $x > 1$.

Logarithme décimal

Le logarithme décimal, utilisé pour le pH, les décibels ou l'échelle de Richter, vérifie $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$: il a les mêmes propriétés, avec $\log 10 = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Étude de la fonction ln

Limites

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe. La croissance est très lente : $\ln x$ dépasse 10 seulement pour $x > \mathrm{e}^{10} \approx 22\,026$.

Dérivée

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

Démonstration. On admet que ln est dérivable. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$. En dérivant les deux membres (dérivée de e^u, qui est $u'\mathrm{e}^u$) : $(\ln x)' \times \mathrm{e}^{\ln x} = 1$, soit $(\ln x)' \times x = 1$, donc $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Une étude de fonction

$f(x) = x - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$, du signe de $x-2$ car $x > 0$. f décroît sur $]0\,;2]$ et croît sur $[2\,;+\infty[$: minimum $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}614 > 0$. Donc $2\ln x < x$ pour tout $x > 0$.

4. Équations, inéquations et seuils

Résoudre

- On fixe d'abord le domaine : on ne prend le logarithme que de nombres **strictement positifs**.
- $\mathrm{e}^u = b$ avec $b > 0 \iff u = \ln b$; si $b \leq 0$, il n'y a aucune solution.
- $\ln u = b \iff u = \mathrm{e}^b$; $\ln u < b \iff 0 < u < \mathrm{e}^b$.
- ln et exp sont croissantes : les appliquer **conserve** le sens d'une inégalité. On change le sens seulement en multipliant ou divisant par un nombre négatif.

Équations et inéquations

- $\mathrm{e}^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \dfrac{\ln 5}{2} \approx 0{,}805.$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\ln x = 3 \iff x = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}09$.
— $\ln(2x-1) \leq 0$: domaine $x > \frac{1}{2}$; $2x - 1 \leq 1 \iff x \leq 1$; $S = \left]\frac{1}{2}\,;1\right]$.
— $\mathrm{e}^{-0{,}2t} < \dfrac{1}{3} \iff -0{,}2t < \ln\dfrac{1}{3} \iff t > \dfrac{\ln 3}{0{,}2} \approx 5{,}49$ (division par $-0{,}2 < 0$).

Seuil d'une suite géométrique : $\ln(q^n) = n \ln q$

Pour trouver le plus petit n tel que $q^n < c$ (ou $q^n > c$), on applique ln puis on divise par $\ln q$, **en changeant le sens si** $\ln q < 0$ (c'est-à-dire si $0 < q < 1$).

Deux seuils

— $0{,}95^n < 0{,}1 \iff n \ln 0{,}95 < \ln 0{,}1 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95} \approx 44{,}9$ (car $\ln 0{,}95 < 0$) : à partir de $n = 45$.
— Un capital placé à 3 % par an double quand $1{,}03^n \geq 2 \iff n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$: il faut 24 ans.

Demi-vie et datation au carbone 14

Le carbone 14 se désintègre selon $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda \approx 1{,}209 \times 10^{-4}$ par an. La demi-vie T vérifie $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, soit $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 5\,730$ ans. Un os qui contient encore 60 % de son carbone 14 a un âge t tel que $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}6$, soit $t = -\dfrac{\ln 0{,}6}{\lambda} \approx 4\,220$ ans.

5. Approche historique

Des tables pour calculer vite

Au XVI^e^ siècle, l'astronomie et la navigation demandaient d'énormes multiplications. L'idée, déjà chez Archimède puis chez Stifel, est de mettre en regard une suite **géométrique** $(1, 2, 4, 8, \dots)$ et une suite **arithmétique** $(0, 1, 2, 3, \dots)$: multiplier deux termes de la première revient à **additionner** leurs rangs dans la seconde. John Napier (Neper) publie en 1614 des tables construites sur ce principe, avec des raisons très proches de 1 pour « remplir les trous » : c'est le passage du discret au continu. Briggs adopte ensuite la base 10.

La quadrature de l'hyperbole

Grégoire de Saint-Vincent (1647) remarque que l'aire sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ entre 1 et a se comporte comme un logarithme : l'aire de 1 à ab est la somme des aires de 1 à a et de 1 à b. On le retrouvera au chapitre de calcul intégral : $\ln a = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Algorithme de Briggs

Prendre 20 fois la racine carrée de x donne un nombre y très proche de 1 ; on a alors $\ln x = 2^{20} \ln y$ et, pour y proche de 1, $\ln y \approx y - 1$ (tangente en 1). D'où $\ln x \approx 2^{20}(y - 1)$.

```
from math import sqrt
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
def briggs(x, k):
    y = x
    for i in range(k):
        y = sqrt(y)
    return 2**k * (y - 1)
```

`briggs(2, 5)` $\approx 0{,}7007$; `briggs(2, 10)` $\approx 0{,}6934$; `briggs(2, 20)` $\approx 0{,}693\,147$, contre $\ln 2 \approx 0{,}693\,147$.

$\ln 2$ par dichotomie

$\ln 2$ est la solution de $e^x = 2$ dans $[0\,;1]$. En coupant l'intervalle en deux dix fois et en gardant la moitié où $e^x - 2$ change de signe, on obtient $0{,}6923 < \ln 2 < 0{,}6934$.

6. Erreurs classiques

À éviter

- $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$: faux, la règle porte sur le **produit**.
- Écrire $\ln(-2)$ ou $\ln 0$: le logarithme n'est défini que sur $]0\,;+\infty[$.
- Oublier de changer le sens de l'inégalité en divisant par $\ln 0{,}95 < 0$.
- Confondre $\ln(x^2) = 2\ln x$ (pour $x > 0$) et $(\ln x)^2$.
- Résoudre $\ln(2x-1) \leq 0$ sans écrire la condition $2x - 1 > 0$.

7. Fiche de synthèse

Définition	$e^x = a \iff x = \ln a$ $(a > 0)$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
Équation fonctionnelle	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
Puissances	$\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
Étude	strictement croissante ; $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $+\infty$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Résoudre	$e^u = b \iff u = \ln b$ $(b > 0)$; $\ln u < b \iff 0 < u < e^b$
Seuil	$q^n < c \iff n > \frac{\ln c}{\ln q}$ si $0 < q < 1$ (sens changé)
Demi-vie	$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Simplifier

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: a) $\ln 12$; b) $\ln \dfrac{9}{8}$; c) $\ln \sqrt{6} - \ln 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Résoudre

Résoudre : a) $3\mathrm{e}^{x} - 7 = 0$; b) $\ln(x+2) = 1$; c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$; d) $\mathrm{e}^{1-x} \geq 4$.

Exercice 3 – Placement

Un capital de 5 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. Déterminer par le calcul au bout de combien d'années il dépasse 8 000 €.

Exercice 4 – Étude

Soit $g(x) = x\ln x - x$ sur $]0\,;+\infty[$. Calculer $g'(x)$, dresser le tableau de variations de g et donner son minimum.

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $\ln 12 = \ln(4\times 3) = 2\ln 2 + \ln 3$. b) $\ln 9 - \ln 8 = 2\ln 3 - 3\ln 2$. c) $\frac{1}{2}\ln 6 - \ln 3 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $\mathrm{e}^{x} = \frac{7}{3}$, $x = \ln\frac{7}{3} \approx 0{,}847$. b) Domaine $x > -2$: $x+2 = \mathrm{e}$, $x = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$. c) Domaine $x > 1$: $\ln(x(x-1)) = \ln 6 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -2$; seul $x = 3$ convient. d) $1 - x \geq \ln 4 \iff x \leq 1 - \ln 4 \approx -0{,}386$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $5\,000 \times 1{,}025^{n} > 8\,000 \iff 1{,}025^{n} > 1{,}6 \iff n\ln 1{,}025 > \ln 1{,}6 \iff n > \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}025} \approx 19{,}03$ ($\ln 1{,}025 > 0$, sens conservé). Il faut 20 ans.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. Produit : $g'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln x$, négatif sur $]0\,;1[$, positif sur $]1\,;+\infty[$. g décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$; minimum $g(1) = -1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).