MATHÉMATIQUES

Fonctions convexes

Terminale maths complémentaires

Dérivée seconde • Fonction convexe • Fonction concave • Sécante • Tangente
f' croissante • $f'' \geq 0$ • Point d'inflexion • Inégalités de convexité

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Fonctions convexes ». Il couvre :

- dérivée seconde d'une fonction ;
- fonction convexe sur un intervalle : définition par la position de la courbe et des sécantes ; équivalence admise, pour f dérivable, avec la position par rapport aux tangentes ;
- caractérisation admise par la croissance de f' et par la positivité de f'' ;
- point d'inflexion ;
- reconnaître sur un graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion ; étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable.

La convexité sert dans les thèmes « Modèles définis par une fonction » et « Répartition des richesses » (courbe de Lorenz).

Objectif : reconnaître graphiquement une fonction convexe ou concave et un point d'inflexion, et étudier la convexité d'une fonction à l'aide de sa dérivée seconde.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Dérivée seconde **3**

2 Convexité et concavité **3**

3 Point d'inflexion **4**

4 Utiliser la convexité **5**

5 Erreurs classiques **6**

6 Fiche de synthèse **6**

7 Exercices d'application **6**

8 Corrigés des exercices **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Dérivée seconde

Dérivée seconde

Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est elle-même dérivable, on note f'' la dérivée de f' : c'est la **dérivée seconde** de f. On dit que f est deux fois dérivable.

Calculs

— $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$.

— $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$: $g'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ et $g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

— $h(x) = \ln x$: $h'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

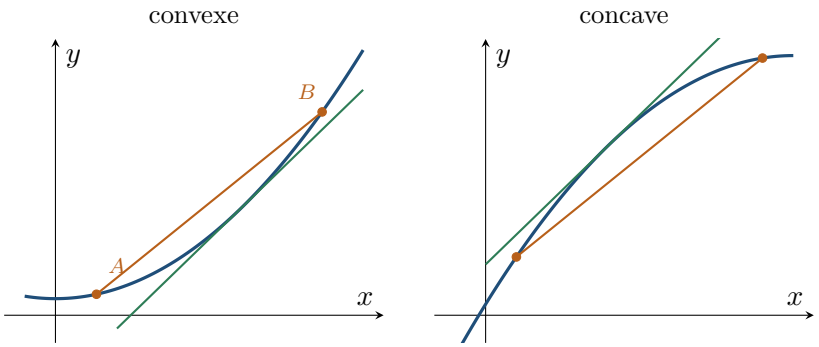
Interprétation cinématique

Si $f(t)$ est une position, $f'(t)$ est la vitesse et $f''(t)$ l'accélération. En économie, si $C(q)$ est un coût, $C''(q) > 0$ signifie que le coût marginal augmente : chaque unité supplémentaire coûte plus cher que la précédente.

2. Convexité et concavité

Fonction convexe, fonction concave

Une fonction f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tous points A et B de sa courbe d'abscisses dans I, l'arc de courbe entre A et B est situé **en dessous de la sécante** $[AB]$. Elle est **concave** si l'arc est au-dessus de ses sécantes (c'est-à-dire si $-f$ est convexe).



Convexe : la courbe est sous ses sécantes (orange) et au-dessus de ses tangentes (vert). Concave : c'est l'inverse.

Tangentes (équivalence admise)

Si f est dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si sa courbe est située **au-dessus de toutes ses tangentes** ; f est concave si et seulement si sa courbe est au-dessous de ses tangentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Caractérisations (admises)

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I.

$$\boxed{f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I \iff f'' \geq 0 \text{ sur } I}$$

$$f \text{ concave sur } I \iff f' \text{ décroissante sur } I \iff f'' \leq 0 \text{ sur } I$$

Fonctions de référence

- $x \mapsto x^2$: $f'' = 2 > 0$, convexe sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \mathrm{e}^x$: $f'' = \mathrm{e}^x > 0$, convexe sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$: concaves sur $]0\,;+\infty[$ (par exemple $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$).
- $x \mapsto \frac{1}{x}$: $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, concave sur $]-\infty\,;0[$, convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- $x \mapsto x^3$: $f''(x) = 6x$, concave sur $]-\infty\,;0]$, convexe sur $[0\,;+\infty[$.

3. Point d'inflexion

Point d'inflexion

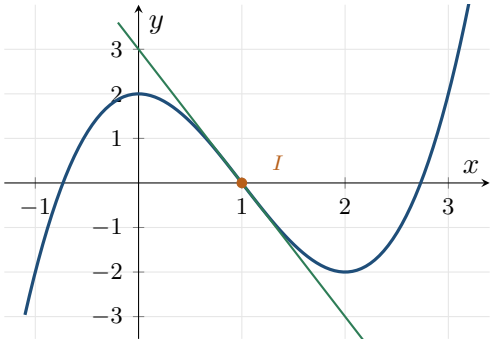
Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où la fonction **change de convexité**. En ce point, la courbe **traverse sa tangente**.

Repérer un point d'inflexion

Si f est deux fois dérivable, la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a lorsque f'' **s'annule en a en changeant de signe**. Il ne suffit pas que $f''(a) = 0$: pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe ; f est convexe et l'origine n'est pas un point d'inflexion.

Étude complète de la convexité

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: $f''(x) = 6(x-1)$, négative sur $]-\infty\,;1[$, positive sur $]1\,;+\infty[$. f est concave sur $]-\infty\,;1]$ et convexe sur $[1\,;+\infty[$; le point $I(1\,;0)$ est un point d'inflexion. La tangente en I a pour pente $f'(1) = -3$: $y = -3(x-1)$, et la courbe la traverse.



En $I(1\,;0)$, la courbe passe de concave à convexe et traverse sa tangente $y = -3(x-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Croissance logistique : le moment où ça ralentit

$P(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ est convexe puis concave ; son point d'inflexion est atteint quand $P = 500$, à $t = 2\ln 9 \approx 4{,}4$ h. Avant, la croissance accélère ; après, elle ralentit : c'est le moment où la vitesse $P'(t)$ est maximale. Lors d'une épidémie, repérer ce « pic de la vitesse » permet d'annoncer le ralentissement.

Avec une exponentielle

$g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$: $g''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $x - 2$. g est concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$: point d'inflexion $\left(2\,;2\mathrm{e}^{-2}\right) \approx (2\,;0{,}271)$.

4. Utiliser la convexité

Inégalités tangentes

Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Appliqué à la tangente en 0 de l'exponentielle ($y = x + 1$) et à la tangente en 1 du logarithme ($y = x - 1$, fonction concave) :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geq x + 1 \text{ pour tout réel } x} \qquad \boxed{\ln x \leq x - 1 \text{ pour tout } x > 0}$$

Inégalité des sécantes

Si f est convexe, la sécante est au-dessus de la courbe ; en prenant le milieu :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Avec $f = \exp$: $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$; la moyenne géométrique de e^a et e^b est inférieure à leur moyenne arithmétique.

Lecture graphique de f'

Sur un graphique de f' : f est convexe là où f' **monte**, concave là où f' descend ; les points d'inflexion de f correspondent aux **extremums** de f'. Sur un graphique de f'' : convexe là où f'' est au-dessus de l'axe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre « croissante » et « convexe » : e^{-x} est décroissante et convexe ; $\ln x$ est croissante et concave.
- Lire la convexité sur le signe de f' : c'est le signe de f'' (ou le sens de variation de f') qui compte.
- Annoncer un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$ sans vérifier le **changement de signe**.
- Inverser les positions : convexe = sous les sécantes, au-dessus des tangentes.

6. Fiche de synthèse

Dérivée seconde	$f'' = (f')'$
Convexe	sous ses sécantes, au-dessus de ses tangentes ; f' croissante ; $f'' \geq 0$
Concave	au-dessus de ses sécantes, sous ses tangentes ; f' décroissante ; $f'' \leq 0$
Inflexion	f'' s'annule en changeant de signe ; la courbe traverse sa tangente
Références	x^2, e^x convexes ; $\ln x$, $\sqrt{x}$ concaves ; x^3 inflexion en 0
Inégalités	$e^x \geq x+1$; $\ln x \leq x-1$; $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ si convexe

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Convexité d'un polynôme

Soit $g(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Calculer $g''(x)$, étudier la convexité de g et donner ses points d'inflexion.

Exercice 2 – Avec l'exponentielle

Soit $h(x) = x^2 e^x$. Montrer que $h''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$, puis déterminer les intervalles où h est convexe.

Exercice 3 – Lecture graphique

On sait que f' est croissante sur $[-2\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;4]$. Que peut-on dire de la convexité de f ? Où se trouve un point d'inflexion ?

Exercice 4 – Une inégalité

En utilisant la convexité de l'exponentielle, montrer que $e^{0,1} \geq 1{,}1$, puis que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout réel x.

8. Corrigés des exercices

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $g'(x) = 4x^3 - 12x$; $g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$. $g'' \geq 0$ sur $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$: convexe ; $g'' \leq 0$ sur $[-1\,;1]$: concave. g'' change de signe en ± 1 : points d'inflexion $(-1\,;-4)$ et $(1\,;-4)$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $h'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$; $h''(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$. Le trinôme a pour racines $-2 \pm \sqrt{2}$ ($\Delta = 8$). h est convexe sur $\left]-\infty\,;-2-\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[-2+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, concave entre les deux.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. f est convexe sur $[-2\,;1]$ (f' croissante) et concave sur $[1\,;4]$: la courbe a un point d'inflexion d'abscisse 1 (où f' est maximale).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. exp est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0 : $\mathrm{e}^x \geq x+1$; avec $x = 0{,}1$: $\mathrm{e}^{0{,}1} \geq 1{,}1$. En remplaçant x par $-x$: $\mathrm{e}^{-x} \geq 1-x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).