MATHÉMATIQUES

Limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Terminale maths complémentaires

Limite en l'infini • Limite en un point • Asymptote horizontale • Asymptote verticale
Continuité • Théorème des valeurs intermédiaires • Fonction réciproque • Dichotomie • Méthode de Newton

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique », et le thème d'étude « Modèles définis par une fonction d'une variable ». Il couvre :

- notion intuitive de limite ; lien avec les asymptotes horizontales ou verticales ; limites des fonctions de référence ;
- opérations sur les limites (admises) ; composition et comparaison utilisées en contexte ;
- continuité (approche intuitive) ; théorème des valeurs intermédiaires (admis), cas des fonctions strictement monotones ;
- réciproque d'une fonction continue strictement monotone, représentation graphique ;
- **algorithmes** : balayage, dichotomie, méthode de Newton.

La formalisation de la notion de limite n'est pas au programme : on raisonne sur des valeurs et des courbes.

Objectif : calculer des limites de fonctions, les interpréter par des asymptotes, utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour compter et encadrer les solutions d'une équation $f(x) = k$.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Limites d'une fonction **3**

2 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires **4**

3 Encadrer une solution : algorithmes **5**

4 Fonction réciproque **6**

5 Erreurs classiques **6**

6 Fiche de synthèse **7**

7 Exercices d'application **7**

8 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Limites d'une fonction

Limite en $+\infty$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$: les valeurs $f(x)$ deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. La droite d'équation $y = \ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: les valeurs $f(x)$ dépassent n'importe quel nombre dès que x est assez grand.

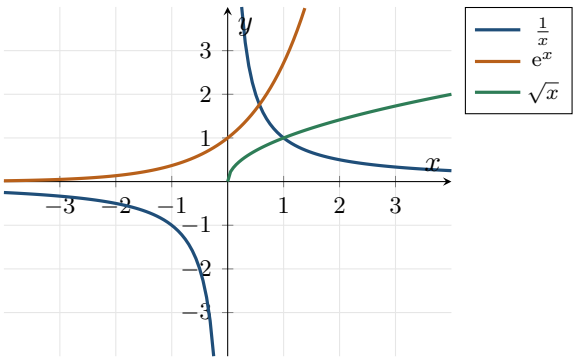
On définit de même les limites en $-\infty$.

Limite infinie en un réel a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) : les valeurs $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut quand x s'approche de a. La droite d'équation $x = a$ est alors **asymptote verticale**. On précise souvent le côté : $x \to a^+$ (avec $x > a$) ou $x \to a^-$ (avec $x < a$).

Limites des fonctions de référence

Fonction	en $-\infty$	en 0	en $+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	—	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$-\infty$ en 0^-, $+\infty$ en 0^+	0
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln x$ (chapitre suivant)	—	$-\infty$ en 0^+	$+\infty$



Les axes sont asymptotes à la courbe de $\frac{1}{x}$; l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de e^x en $-\infty$.

Opérations (admises)

Les règles sont celles des suites : somme, produit et quotient se calculent « naturellement », sauf dans les **formes indéterminées** $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. Pour un quotient de limite « $\frac{\ell}{0}$ » avec $\ell \neq 0$, la limite est infinie : le signe se lit dans un tableau de signes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Lever une indétermination en l'infini

Pour un polynôme ou un quotient de polynômes, on **factorise par le terme de plus haut degré**.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{2}{1}=2.$$

Asymptotes de $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

- En $\pm\infty$: $f(x)\to 2$, donc la droite $y=2$ est asymptote horizontale.
- En 3 : le numérateur tend vers $7>0$ et le dénominateur vers 0. Si $x\to 3^+$, $x-3>0$ et $f(x)\to+\infty$; si $x\to 3^-$, $x-3<0$ et $f(x)\to-\infty$. La droite $x=3$ est asymptote verticale.

Composition et comparaison, en contexte

- **Composition** : pour $\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, on a $-0{,}5t\to-\infty$ quand $t\to+\infty$, et $\mathrm{e}^{X}\to 0$ quand $X\to-\infty$: donc $\mathrm{e}^{-0{,}5t}\to 0$.
- **Comparaison** : si $f(x)\geq g(x)$ et $g(x)\to+\infty$, alors $f(x)\to+\infty$; et le théorème des gendarmes reste valable.

Croissance logistique

Une population de bactéries (en milliers) suit $P(t)=\dfrac{1\,000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$, t en heures. Quand $t\to+\infty$, $\mathrm{e}^{-0{,}5t}\to 0$, donc $P(t)\to\dfrac{1\,000}{1}=1\,000$: la droite $y=1\,000$ est asymptote horizontale, c'est la **capacité maximale** du milieu. $P(0)=100$, $P(4)\approx 451$, $P(10)\approx 943$.

2. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité (approche intuitive)

Une fonction est **continue** sur un intervalle si sa courbe se trace « sans lever le crayon ». Les fonctions de référence, leurs sommes, produits, quotients (là où le dénominateur ne s'annule pas) et composées sont continues sur leur ensemble de définition. On admet qu'une fonction **dérivable** sur un intervalle y est continue.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a **au moins une** solution dans $[a\,;b]$.

Cas d'une fonction strictement monotone

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a\,;b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une **unique** solution dans $[a\,;b]$. Le résultat s'étend à un intervalle ouvert ou infini en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites aux bornes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Compter les solutions de $f(x) = k$

On dresse le tableau de variations complet (avec les limites aux bornes), puis on applique le théorème sur **chaque intervalle où f est strictement monotone** : on compte une solution par intervalle dont l'image contient k.

Trois solutions

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;-1]$, f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à 3 : 0 est atteint une fois. De même sur $[-1\,;1]$ (de 3 à -1) et sur $[1\,;+\infty[$ (de -1 à $+\infty$). L'équation $f(x) = 0$ a donc **exactement trois solutions** : $\alpha \approx -1{,}879$, $\beta \approx 0{,}347$ et $\gamma \approx 1{,}532$.

Il faut la continuité ET la stricte monotonie

Sans continuité, la courbe peut « sauter » par-dessus k ; sans stricte monotonie, le théorème garantit l'existence mais pas l'unicité. Sur la rédaction, citer les deux hypothèses.

3. Encadrer une solution : algorithmes

Balayage

On calcule $f(x)$ pour des valeurs régulièrement espacées (pas 0,1, puis 0,01…) et l'on repère le changement de signe de $f(x) - k$. Pour $f(x) = x^3 + x - 3$: $f(1{,}21) \approx -0{,}018$ et $f(1{,}22) \approx 0{,}036$, donc la solution α de $f(x) = 0$ vérifie $1{,}21 < \alpha < 1{,}22$.

Dichotomie

On part d'un intervalle $[a\,;b]$ où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. On calcule le milieu m ; on garde la moitié où le signe change. La longueur est divisée par 2 à chaque étape.

```
def dichotomie(f, a, b, precision):
    while b - a > precision:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Avec $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $[1\,;2]$: $[1\,;1{,}5]$, $[1\,;1{,}25]$, $[1{,}125\,;1{,}25]$, $[1{,}1875\,;1{,}25]$, $[1{,}1875\,;1{,}218\,75]$…
En 20 étapes, la précision atteint 10^{-6} : $\alpha \approx 1{,}213\,41$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Méthode de Newton

On remplace la courbe par sa tangente : à partir de x_n, on prend pour x_{n+1} l'abscisse où la tangente coupe l'axe :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Pour $f(x) = x^3 + x - 3$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ et $x_0 = 1$: $x_1 = 1{,}25$; $x_2 \approx 1{,}214\,29$; $x_3 \approx 1{,}213\,41$. Trois étapes suffisent ici pour 4 décimales exactes.

4. Fonction réciproque

Réciproque d'une fonction continue strictement monotone

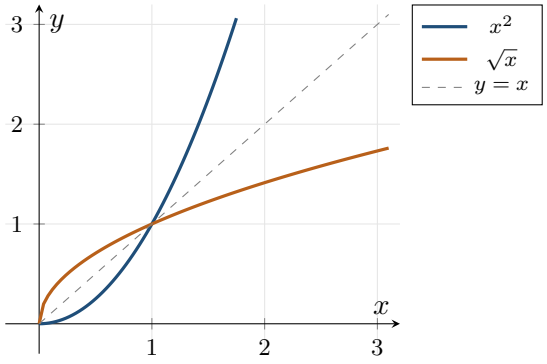
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, chaque valeur y de $f(I)$ a un **unique** antécédent x dans I. La fonction $y \mapsto x$ est la **réciproque** de f, notée f^{-1} :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$.

Couples de fonctions réciproques

- Carré sur $[0\,;+\infty[$ et racine carrée : $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ (pour $x, y \geq 0$).
- Cube sur $\mathbb{R}$: $y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}$; par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$.
- Exponentielle et logarithme népérien : $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y$ (pour $y > 0$), au chapitre suivant.



Carré et racine carrée sur $[0\,;+\infty[$: courbes symétriques par rapport à la droite $y = x$.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Conclure « la limite est $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » : c'est une forme indéterminée, il faut factoriser.
- Oublier le côté dans une limite en a : $\frac{1}{x-3}$ tend vers $+\infty$ en 3^+ mais vers $-\infty$ en 3^-.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans vérifier que k est **entre** les deux valeurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Annoncer une solution unique sans stricte monotonie.
— Confondre $f^{-1}(x)$ (réciproque) et $\frac{1}{f(x)}$ (inverse).

6. Fiche de synthèse

Asymptotes	$\lim_{\pm\infty} f = \ell$: $y = \ell$ horizontale ; $\lim_{a} f = \pm\infty$: $x = a$ verticale
Références	$x^2, x^3, \sqrt{x}, \mathrm{e}^x \to +\infty$ en $+\infty$; $\frac{1}{x} \to 0$; $\mathrm{e}^x \to 0$ en $-\infty$
Indéterminations	$\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$: factoriser par le terme dominant
TVI	f continue sur $[a\,;b]$, k entre $f(a)$ et $f(b)$: au moins une solution
Unicité	f continue et strictement monotone : exactement une solution
Encadrer	balayage, dichotomie, Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Réciproque	$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; courbes symétriques par rapport à $y = x$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Limites et asymptotes

Soit $g(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Déterminer les limites de g en -1 et en $+\infty$ et interpréter graphiquement.

Exercice 2 – Limites avec l'exponentielle

Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5 - 2\mathrm{e}^{-x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)$; c) $\lim\limits_{t\to+\infty} 37 + 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

Exercice 3 – Nombre de solutions

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α, puis l'encadrer au centième.

Exercice 4 – Coût de production

Le coût total de fabrication de q centaines d'objets est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$ (en milliers d'euros), $q \in [0\,;8]$. Montrer que C est strictement croissante, puis qu'il existe une unique production q_0 pour laquelle le coût vaut 100 milliers d'euros ; calculer $C(6)$ et conclure.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. En -1^+ : le numérateur tend vers -5 et $x+1 \to 0^+$, donc $g(x) \to -\infty$: asymptote verticale $x = -1$. En $+\infty$: $g(x) = \dfrac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \to 3$: asymptote horizontale $y = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc la limite vaut 5. b) $x^2 \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{x} \to 0$: limite $+\infty$. c) $\mathrm{e}^{-0{,}1t} \to 0$: limite 37 (une température qui se stabilise à 37 °C).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. 1. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; en factorisant par x^3, $f(x) \to -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. 2. f est continue, strictement croissante, et 0 est compris entre les limites : une unique solution α. $f(1{,}21) \approx -0{,}018 < 0$ et $f(1{,}22) \approx 0{,}036 > 0$: $1{,}21 < \alpha < 1{,}22$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $C'(q) = 3q^2 - 12q + 15 = 3(q^2 - 4q + 5) = 3\left((q-2)^2 + 1\right) > 0$: C est strictement croissante et continue sur $[0\,;8]$, de $C(0) = 10$ à $C(8) = 258$. Comme 100 est entre 10 et 258, il existe un unique q_0 tel que $C(q_0) = 100$. Enfin $C(6) = 216 - 216 + 90 + 10 = 100$: $q_0 = 6$, soit 600 objets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).