MATHÉMATIQUES

Loi binomiale et échantillonnage

Terminale maths complémentaires

Loi uniforme discrète • Loi de Bernoulli • Schéma de Bernoulli • Coefficients binomiaux • Triangle de Pascal Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ • $E(X) = np$ • Intervalle de fluctuation • Échantillonnage • Simulation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Lois discrètes », et le thème d'étude « Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage ». Il couvre :

- loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ et son espérance ;
- épreuve et loi de Bernoulli : espérance et écart type ; schéma de Bernoulli et arbre ;
- coefficients binomiaux : définition, triangle de Pascal, symétrie ;
- loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: expression, espérance et écart type (admis), représentation ;
- intervalle I tel que $P(X \in I) \geq 1-\alpha$; sondages, tests, surréservation ;
- **algorithmes** : triangle de Pascal, simulations d'échantillons à partir de la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

Démonstrations possibles : espérance d'une loi uniforme, d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale pour $n \leq 3$.

Objectif : reconnaître et utiliser une loi de Bernoulli ou une loi binomiale, calculer des probabilités et des espérances, et prendre une décision à partir d'un échantillon.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Loi uniforme discrète et loi de Bernoulli 3

2 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux 3

3 Loi binomiale 4

4 Intervalles de fluctuation et décision 5

5 Échantillonnage et simulation 6

6 Erreurs classiques 7

7 Fiche de synthèse 7

8 Exercices d'application 7

9 Corrigés des exercices 7

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Loi uniforme discrète et loi de Bernoulli

Loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$

X suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ si chaque valeur a la même probabilité $\frac{1}{n}$. C'est le cas du numéro obtenu avec un dé équilibré à n faces.

Espérance

$$E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

Démonstration. $E(X) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. Pour un dé à six faces, $E(X) = 3{,}5$.

Épreuve et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à deux issues : « succès », de probabilité p, et « échec », de probabilité $1 - p$. La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Espérance et écart type d'une loi de Bernoulli

$$\boxed{E(X) = p} \qquad V(X) = p(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Démonstration. $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$. $V(X) = (1-p)^2 p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)\left[(1-p) + p\right] = p(1-p)$.

2. Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, de paramètre p. On le représente par un arbre à 2^n chemins.

Coefficient binomial

Le nombre de chemins de l'arbre qui comportent exactement k succès est noté $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »). Par convention $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Symétrie et relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

La symétrie vient de l'échange des rôles de « succès » et « échec ». La relation de Pascal se lit sur l'arbre : un chemin de longueur $n+1$ à $k+1$ succès se termine soit par un succès (précédé

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de k succès), soit par un échec (précédé de $k+1$ succès).

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Triangle de Pascal : chaque nombre est la somme du nombre au-dessus et de celui au-dessus à gauche.

Algorithme du triangle de Pascal

```
def pascal(n):
    ligne = [1]
    for i in range(n):
        ligne = [1] + [ligne[k] + ligne[k + 1] for k in range(len(ligne) - 1)] + [1]
    return ligne
```

`pascal(5)` renvoie `[1, 5, 10, 10, 5, 1]`.

3. Loi binomiale

Loi binomiale

Le nombre X de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$: pour tout entier k de 0 à n,

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Espérance et écart type (admis)

$$\boxed{E(X)=np} \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}.$$

En moyenne, sur un grand nombre de répétitions du schéma, on obtient np succès.

Démonstration de $E(X)=np$ pour $n=2$. $P(X=0)=(1-p)^2$, $P(X=1)=2p(1-p)$, $P(X=2)=p^2$. Donc $E(X)=2p(1-p)+2p^2=2p(1-p+p)=2p$. Le calcul pour $n=3$ est analogue : $E(X)=3p(1-p)^2+6p^2(1-p)+3p^3=3p$.

Un QCM au hasard

Un QCM a 10 questions à 4 propositions, dont une seule juste. Un élève répond au hasard : X = nombre de bonnes réponses suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}25)$, avec $E(X)=2{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Calculs avec $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$

— $P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0{,}3^3\times 0{,}7^7=120\times 0{,}027\times 0{,}7^7\approx 0{,}267$.

— $P(X\leq 2)\approx 0{,}383$ (calculatrice : fonction de répartition binomiale) ; $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)\approx 0{,}617$.

— $E(X)=3$ et $\sigma(X)=\sqrt{2{,}1}\approx 1{,}45$.

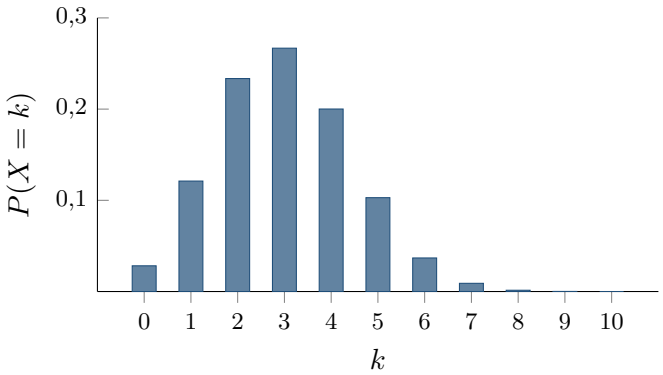


Diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$: les valeurs se concentrent autour de $E(X)=3$.

Vérifier les conditions

La loi binomiale exige des épreuves **indépendantes** et de **même** probabilité de succès : tirages **avec remise**, ou sans remise dans une très grande population (on assimile alors à un tirage avec remise). Pour un tirage sans remise dans une petite urne, ce n'est plus une loi binomiale.

4. Intervalles de fluctuation et décision

Intervalle I tel que $P(X\in I)\geq 1-\alpha$

Avec la calculatrice ou un tableur, on calcule les probabilités cumulées $P(X\leq k)$ et l'on cherche :

— un intervalle **centré** $[a\,;n-a]$ (cas $p=\frac{1}{2}$) dont la probabilité dépasse $1-\alpha$;

— ou un intervalle $[0\,;k]$ avec le plus petit k tel que $P(X\leq k)\geq 1-\alpha$.

Une pièce est-elle truquée ?

On lance 100 fois une pièce. Si elle est équilibrée, le nombre de piles X suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$. La calculatrice donne $P(40\leq X\leq 60)\approx 0{,}965$ et $P(41\leq X\leq 59)\approx 0{,}943$: $I=[40\,;60]$ est le plus petit intervalle centré en 50 de probabilité au moins 0,95.
Règle de décision au seuil $\alpha=5\,\%$: si le nombre de piles observé est dans I, on ne rejette pas l'hypothèse « la pièce est équilibrée » ; sinon on la rejette, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %. Avec 62 piles, on conclut que la pièce est probablement truquée.

Surréservation

Un avion a 200 places ; chaque passager ayant réservé se présente avec la probabilité 0,93, indépendamment des autres. Si la compagnie vend n billets, le nombre de passagers présents suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}93)$, et il y a surréservation si $X>200$. Calculatrice : pour $n=209$, $P(X>200)\approx 0{,}040$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pour $n = 210$, $P(X > 200) \approx 0{,}073$. Pour garder ce risque sous 5 %, la compagnie peut vendre jusqu'à 209 billets.

Démarche des tests

Dans un test, on part d'un **modèle** (une hypothèse sur p), on calcule ce que ce modèle prévoit, et l'on confronte l'observation à cette prévision. Une observation très improbable dans le modèle conduit à le rejeter ; une observation compatible ne **prouve** pas qu'il est vrai, elle ne permet pas de le rejeter.

5. Échantillonnage et simulation

Simuler avec la loi uniforme sur $[0\,;1]$

`random()` renvoie un nombre au hasard dans $[0\,;1[$ (loi uniforme). La condition `random() < p` est vraie avec la probabilité p : c'est une épreuve de Bernoulli. Pour un dé : `int(6 * random()) + 1`, uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$.

```
from random import random
def echantillon(n, p):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            succes = succes + 1
    return succes / n          # frequence observee
```

Fluctuation de la moyenne d'un échantillon

Pour un échantillon de taille n d'une variable d'espérance μ et d'écart type σ, la moyenne M fluctue autour de μ avec un écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En simulant un grand nombre d'échantillons, on observe qu'environ 95 % des moyennes sont dans $\left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\,;\mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ et presque toutes dans l'intervalle de rayon $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$.

Fourchette de sondage

Pour une fréquence (loi de Bernoulli), $\sigma = \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$, donc $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Un sondage auprès de $n = 1\,000$ personnes qui donne 52 % d'intentions de vote conduit à la fourchette $\left[0{,}52 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;0{,}52 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}488\,;0{,}552]$: impossible d'annoncer un vainqueur. La précision n'est valable que si l'échantillon est tiré au hasard ; les biais (personnes injoignables, réponses peu sincères) ne sont pas mesurés par ce calcul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier le coefficient binomial : $P(X = k) \neq p^k(1-p)^{n-k}$, qui est la probabilité d'**un** chemin.
- Calculer $P(X \geq 3)$ comme $1 - P(X \leq 3)$: c'est $1 - P(X \leq 2)$.
- Utiliser la loi binomiale pour des tirages sans remise dans une petite population.
- Conclure « le modèle est vrai » parce que l'observation tombe dans l'intervalle.

7. Fiche de synthèse

Uniforme $\{1,\dots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$; $E(X)=\frac{n+1}{2}$
Bernoulli	$E=p$; $V=p(1-p)$; $\sigma=\sqrt{p(1-p)}$
Coefficients	$\binom{n}{k}$ chemins à k succès ; $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$; Pascal $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$
Binomiale	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$; $E=np$; $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$
Décision	intervalle I avec $P(X\in I)\geq 1-\alpha$; hors de I : rejet du modèle
Échantillons	moyenne : écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; sondage : $f \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – QCM

Avec le QCM de la section 3 ($X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}25)$), calculer $P(X=0)$, $P(X\geq 1)$ et la probabilité d'avoir au moins la moyenne ($X \geq 5$).

Exercice 2 – Pascal

À l'aide du triangle de Pascal, donner $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{4}$, puis calculer $P(Y=2)$ pour $Y \sim \mathcal{B}(6\,;0{,}5)$.

Exercice 3 – Un dé suspect

On lance 120 fois un dé et l'on compte les six. Si le dé est équilibré, $X \sim \mathcal{B}\left(120\,;\frac{1}{6}\right)$. On admet que $P(X\leq 11)\approx 0{,}014$, $P(X\leq 12)\approx 0{,}028$, $P(X\leq 27)\approx 0{,}963$ et $P(X\leq 28)\approx 0{,}978$. Montrer que $P(12\leq X\leq 28)\geq 0{,}95$. On obtient 31 six : que conclure ?

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $P(X=0)=0{,}75^{10}\approx 0{,}056$; $P(X\geq 1)=1-0{,}75^{10}\approx 0{,}944$; $P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)\approx 0{,}078$ (calculatrice).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. Ligne 6 : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$; $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ (symétrie). $P(Y = 2) = 15 \times 0{,}5^6 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $P(12 \leq X \leq 28) = P(X \leq 28) - P(X \leq 11) \approx 0{,}978 - 0{,}014 = 0{,}964 \geq 0{,}95$: $I = [12\,;28]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (il laisse environ 1,4 % de chaque côté). Comme 31 est hors de l'intervalle, on rejette au seuil de 5 % l'hypothèse « le dé est équilibré » : il semble favoriser le six.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).