MATHÉMATIQUES

# Loi géométrique et temps d'attente

## Terminale maths complémentaires

Rang du premier succès • Loi géométrique • $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ • $P(X > n) = (1-p)^n$ $E(X) = \frac{1}{p}$ • Absence de mémoire • Temps d'attente • Période de retour • Simulation

### Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Lois discrètes », et le thème d'étude « Temps d'attente ». Il couvre :

- loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique ;
- propriété caractéristique : absence de mémoire ;
- calcul explicite de probabilités ; utilisation de l'espérance en situation ;
- **démonstration** : caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire ;
- **algorithme** : simulation d'une loi géométrique à partir d'un schéma de Bernoulli.

Le temps d'attente continu (loi exponentielle) est traité au chapitre « Lois à densité ».

**Objectif :** reconnaître une situation de temps d'attente discret, calculer des probabilités avec la loi géométrique, utiliser son espérance et sa propriété d'absence de mémoire.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

# Table des matières

**1 Le rang du premier succès** **3**

**2 Probabilités cumulées et espérance** **3**

**3 L'absence de mémoire** **4**

**4 Simulation** **5**

**5 Erreurs classiques** **5**

**6 Fiche de synthèse** **5**

**7 Exercices d'application** **6**

**8 Corrigés des exercices** **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

# 1. Le rang du premier succès

**Loi géométrique**

On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ ($0 < p < 1$), de façon indépendante, **jusqu'au premier succès**. Le rang $X$ de ce premier succès suit la **loi géométrique** de paramètre $p$, notée $\mathcal{G}(p)$ : $X$ prend les valeurs $1, 2, 3, \dots$ et

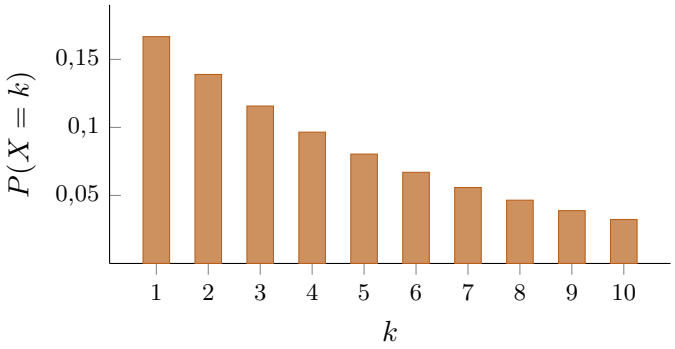
$$\boxed{P(X = k) = (1-p)^{k-1}\,p} \qquad (k \geq 1).$$

**Justification.** $X = k$ signifie : $k-1$ échecs puis un succès. Les épreuves étant indépendantes, la probabilité de ce chemin unique est le produit $(1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p = (1-p)^{k-1}p$.

**Attendre le premier six**

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six : $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- $P(X = 1) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ ; $P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}116$.
- Les probabilités **diminuent** quand $k$ augmente : la valeur la plus probable est toujours $k = 1$.




Loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$ : chaque bâton vaut $\frac{5}{6}$ du précédent (suite géométrique, d'où le nom).

# 2. Probabilités cumulées et espérance

**Attendre plus de $n$ épreuves**

Pour tout entier $n \geq 0$ :

$$\boxed{P(X > n) = (1-p)^n} \qquad \text{et} \qquad P(X \leq n) = 1 - (1-p)^n.$$

**Démonstration.** $X > n$ signifie que les $n$ premières épreuves sont toutes des échecs, de probabilité $(1-p)^n$ par indépendance.

**Espérance (admise)**

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

En moyenne, il faut $\frac{1}{p}$ épreuves pour obtenir le premier succès : 6 lancers pour un six, 100 ans

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pour une crue de probabilité annuelle 0,01.

**Calculs avec un dé**

— $P(X > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162$ : dans 16 % des cas, on attend plus de dix lancers.

— Combien de lancers prévoir pour avoir au moins 90 % de chances d'obtenir un six ? $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \iff n \geq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12{,}6$ (division par $\ln \frac{5}{6} < 0$) : 13 lancers.

**Crue centennale**

Une crue est dite « centennale » si sa probabilité d'arriver une année donnée est $p = 0{,}01$, indépendamment des autres années. Sa **période de retour** est $E(X) = 100$ ans. Pourtant, la probabilité d'en subir au moins une pendant un emprunt immobilier de 30 ans est $P(X \leq 30) = 1 - 0{,}99^{30} \approx 0{,}26$ : plus d'une chance sur quatre. « Centennale » ne veut pas dire « une fois par siècle ».

## 3. L'absence de mémoire

**Absence de mémoire**

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, pour tous entiers $m \geq 0$ et $n \geq 0$ :

$$\boxed{P_{X>m}(X > m + n) = P(X > n)}$$

Savoir que l'on a déjà attendu $m$ épreuves sans succès ne change rien à la loi de l'attente restante.

**Démonstration.** L'événement $X > m + n$ est inclus dans $X > m$, donc

$$P_{X>m}(X > m + n) = \frac{P(X > m + n)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(X > n).$$

**Caractérisation (démonstration possible)**

Réciproquement, si $X$ prend ses valeurs dans $\{1, 2, \dots\}$, vérifie $P(X = 1) = p$ avec $0 < p < 1$ et l'absence de mémoire, alors $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

**Démonstration.** Posons $u_n = P(X > n)$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 - p$. L'absence de mémoire avec $m = n$ et un pas de 1 donne $u_{n+1} = P(X > n) \times P(X > 1) = (1-p)\, u_n$ : $(u_n)$ est géométrique de raison $1-p$, donc $u_n = (1-p)^n$. Enfin $P(X = k) = u_{k-1} - u_k = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1} p$.

**Le « sophisme du joueur »**

Après dix lancers sans six, le joueur pense que le six « doit » sortir. C'est faux : le dé n'a pas de mémoire, la probabilité d'obtenir un six au lancer suivant reste $\frac{1}{6}$, et le nombre moyen de lancers encore nécessaires reste 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## 4. Simulation

**Simuler une loi géométrique**

On répète l'épreuve de Bernoulli (`random() < p`) jusqu'au premier succès et l'on renvoie le rang obtenu.

```
from random import random
def geometrique(p):
    rang = 1
    while random() >= p:       # echec
        rang = rang + 1
    return rang

def moyenne(p, N):
    s = 0
    for i in range(N):
        s = s + geometrique(p)
    return s / N
```

`moyenne(1/6, 100000)` renvoie une valeur proche de $6 = \frac{1}{p}$, ce qui illustre l'espérance admise.

## 5. Erreurs classiques

**À éviter**

- Écrire $P(X = k) = (1-p)^k p$ : il y a $k-1$ échecs avant le succès au rang $k$.
- Confondre loi géométrique (rang du premier succès, nombre d'épreuves non fixé) et loi binomiale (nombre de succès en $n$ épreuves fixées).
- Calculer $P(X \leq n)$ en additionnant à la main : utiliser $1-(1-p)^n$.
- Croire qu'une longue série d'échecs rend le succès « plus probable ».

## 6. Fiche de synthèse

| | |
|---|---|
| **Situation** | épreuves de Bernoulli indépendantes répétées jusqu'au premier succès |
| **Loi** | $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geq 1$ |
| **Cumulées** | $P(X > n) = (1-p)^n$ ; $P(X \leq n) = 1-(1-p)^n$ |
| **Espérance** | $E(X) = \frac{1}{p}$ (période de retour) |
| **Sans mémoire** | $P_{X>m}(X > m+n) = P(X > n)$ |
| **Seuil** | $(1-p)^n \leq c \iff n \geq \frac{\ln c}{\ln(1-p)}$ |

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## 7. Exercices d'application

### Exercice 1 – Calculs

$X$ suit la loi géométrique de paramètre 0,2. Calculer $P(X = 4)$, $P(X > 5)$, $P(X \leq 5)$ et $E(X)$.

### Exercice 2 – Composant électronique

Chaque jour, un composant tombe en panne avec la probabilité 0,002, indépendamment des jours précédents. On note $X$ le jour de la première panne.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Sa durée de vie moyenne ?
2. Probabilité qu'il fonctionne encore au bout d'un an (365 jours) ?
3. Il a fonctionné 200 jours : probabilité qu'il fonctionne encore 365 jours de plus ?

### Exercice 3 – Contrôle routier

Un automobiliste sur 20 est en infraction. Un gendarme contrôle les voitures une par une. Probabilité qu'il trouve une infraction parmi les 10 premières voitures ? Combien de voitures contrôle-t-il en moyenne avant la première infraction (incluse) ?

## 8. Corrigés des exercices

### Corrigé de l'exercice 1

**Corrigé.** $P(X = 4) = 0{,}8^3 \times 0{,}2 = 0{,}1024$ ; $P(X > 5) = 0{,}8^5 \approx 0{,}328$ ; $P(X \leq 5) = 1 - 0{,}8^5 \approx 0{,}672$ ; $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$.

### Corrigé de l'exercice 2

**Corrigé.** 1. $X \sim \mathcal{G}(0{,}002)$ ; $E(X) = 500$ jours. 2. $P(X > 365) = 0{,}998^{365} \approx 0{,}482$. 3. Absence de mémoire : $P_{X>200}(X > 565) = P(X > 365) \approx 0{,}482$, la même valeur.

### Corrigé de l'exercice 3

**Corrigé.** Rang de la première infraction : $X \sim \mathcal{G}(0{,}05)$. $P(X \leq 10) = 1 - 0{,}95^{10} \approx 0{,}401$. $E(X) = \frac{1}{0{,}05} = 20$ voitures.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).