MATHÉMATIQUES

# Lois à densité : loi uniforme et loi exponentielle

## Terminale maths complémentaires

Densité de probabilité • Probabilité = aire • Fonction de répartition • Espérance, variance • Loi uniforme sur $[a\,;b]$ • Loi exponentielle • $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ • Absence de mémoire • Simulation

### Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Lois à densité », et le thème d'étude « Temps d'attente ». Il couvre :

- notion de loi à densité à partir d'exemples ; probabilité représentée par une aire ; fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$ ;
- espérance et variance d'une loi à densité, sous forme d'intégrales ;
- loi uniforme sur $[0\,;1]$ puis sur $[a\,;b]$ : densité, fonction de répartition, espérance, variance ;
- loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, absence de mémoire ;
- **algorithmes** : simuler une variable de Bernoulli, un dé, une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

Prérequis : calcul intégral.

**Objectif :** calculer des probabilités, une espérance et une variance pour une variable aléatoire à densité, en particulier pour les lois uniformes et exponentielles, et modéliser un temps d'attente continu.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

# Table des matières

**1 Variable aléatoire à densité** **3**

**2 Loi uniforme** **4**

**3 Loi exponentielle** **5**

**4 Simulations** **6**

**5 Erreurs classiques** **6**

**6 Fiche de synthèse** **7**

**7 Exercices d'application** **7**

**8 Corrigés des exercices** **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

# 1. Variable aléatoire à densité

## Pourquoi une densité ?

Un temps d'attente, une durée de vie, une taille sont des grandeurs **continues** : elles peuvent prendre une infinité de valeurs dans un intervalle. La probabilité d'une valeur exacte ($X = 7{,}000\ldots$ minutes) est nulle ; ce qui a un sens, c'est la probabilité d'un **intervalle**, que l'on représente par une aire.

## Densité de probabilité

Une **densité** sur un intervalle $I$ est une fonction $f$ continue (sauf éventuellement en quelques points), **positive** sur $I$, dont l'aire totale sous la courbe vaut 1 :

$$f \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Une variable aléatoire $X$ de densité $f$ vérifie, pour $[c\,;d] \subset I$ :

$$\boxed{P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

En particulier $P(X = c) = 0$, donc $P(c \leq X \leq d) = P(c < X < d)$ : inégalités larges ou strictes, c'est pareil.

## Fonction de répartition

La **fonction de répartition** de $X$ est $F(x) = P(X \leq x)$. C'est une fonction croissante, de 0 à 1, et $P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)$.

## Espérance et variance

Pour $X$ de densité $f$ sur $[a\,;b]$ :

$$\boxed{E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad V(X) = \int_a^b \big(x - E(X)\big)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

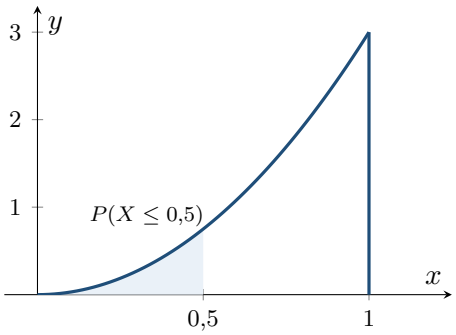
Ce sont les analogues continus de $\sum x_i\,p_i$ et $\sum (x_i - \mu)^2 p_i$.

## Une densité polynomiale

$f(x) = 3x^2$ sur $[0\,;1]$ est positive et $\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x = \big[x^3\big]_0^1 = 1$ : c'est une densité.

- $F(x) = \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t = x^3$ ; $P(X \leq 0{,}5) = 0{,}125$ ; $P(X > 0{,}9) = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$.
- $E(X) = \int_0^1 3x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$.
- $V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{80} = 0{,}0375$ (en développant).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).




La probabilité $P(X \leq 0{,}5) = 0{,}125$ est l'aire colorée sous la densité $f(x) = 3x^2$.

## 2. Loi uniforme

**Loi uniforme sur $[a\,;b]$**

$X$ suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$ si sa densité est **constante** : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\,;b]$. La probabilité d'un intervalle est proportionnelle à sa longueur :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ sur } [a\,;b].$$

Pour $[0\,;1]$ : $f(x) = 1$ et $F(x) = x$.

**Espérance et variance**

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Démonstration.** $E(X) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$, le milieu de l'intervalle.

**À l'arrêt de bus**

Un bus passe toutes les 15 minutes ; on arrive au hasard. Le temps d'attente $T$ suit la loi uniforme sur $[0\,;15]$. $P(T > 10) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ; $E(T) = 7{,}5$ min ; $\sigma(T) = \frac{15}{\sqrt{12}} \approx 4{,}3$ min.

**Le paradoxe de l'inspection**

Si les intervalles entre deux bus sont **irréguliers** (parfois 5 min, parfois 25), on a plus de chances d'arriver pendant un long intervalle que pendant un court : l'attente moyenne observée dépasse alors la moitié de l'intervalle moyen. C'est pourquoi le bus semble toujours « en retard ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## 3. Loi exponentielle

**Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$**

$X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si sa densité sur $[0\,;+\infty[$ est

$$\boxed{f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}.$$

Pour $t \geq 0$ : $P(X \leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$, et donc

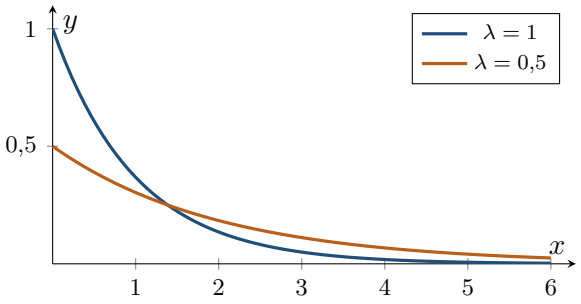
$$\boxed{P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}}.$$

Quand $t \to +\infty$, $P(X \leq t) \to 1$ : l'aire totale vaut bien 1.

**Espérance**

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}.$$

**Démonstration.** La fonction $G(x) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ a pour dérivée $-\mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ : c'est une primitive de $xf(x)$. Donc $\int_0^t xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, qui tend vers $\frac{1}{\lambda}$ quand $t \to +\infty$ (on admet que $t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$).




Densités de lois exponentielles : plus $\lambda$ est petit, plus les attentes longues sont probables (espérance $\frac{1}{\lambda}$).

**Absence de mémoire**

Pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ :

$$\boxed{P_{X>t}(X > t + s) = P(X > s)}$$

**Démonstration.** $P_{X>t}(X > t+s) = \dfrac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = P(X > s)$.

**Modèle continu de la loi géométrique**

La loi exponentielle est la version continue de la loi géométrique : un phénomène qui « ne vieillit pas » (désintégration d'un atome, panne d'un composant électronique hors usure, temps entre deux appels). On peut d'ailleurs montrer qu'une loi à densité sans mémoire est une loi exponentielle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Durée de vie d'une ampoule**

La durée de vie $X$ (en heures) d'une diode suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$. Durée de vie moyenne : $E(X) = 2\,000$ h. $P(X > 1\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}607$. La durée $t$ telle que $P(X \leq t) = 0{,}5$ (médiane) vérifie $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}5$, soit $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 1\,386$ h, inférieure à la moyenne.

**Demi-vie d'un atome**

La durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. La moitié d'un grand échantillon a disparu au temps $T$ tel que $P(X > T) = \frac{1}{2}$ : $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, la demi-vie. Pour un échantillon de $N$ atomes, il en reste en moyenne $N\mathrm{e}^{-\lambda t}$ au temps $t$ : on retrouve la loi de décroissance radioactive.

## 4. Simulations

**Tout simuler à partir de `random()`**

- Bernoulli de paramètre $p$ : `1 if random() < p else 0`.
- Dé à $n$ faces : `int(n * random()) + 1`.
- Loi uniforme sur $[a\,;b]$ : `a + (b - a) * random()`.
- Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ : `-log(1 - random()) / lam`. En effet, si $U$ est uniforme sur $[0\,;1[$, $P\left(-\frac{\ln(1-U)}{\lambda} > t\right) = P\left(1-U < \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

**Somme de variables indépendantes**

```
from random import random
def somme(n):
    return sum(random() for i in range(n))
```

En simulant beaucoup de valeurs de `somme(12)` et en traçant leur histogramme, on observe une courbe « en cloche » centrée sur 6 : la somme de nombreuses variables indépendantes de même loi a une répartition très régulière, quelle que soit la loi de départ.

## 5. Erreurs classiques

**À éviter**

- Croire que $f(x)$ est une probabilité : c'est l'aire sous $f$ qui en est une ($f$ peut dépasser 1).
- Oublier de vérifier que l'aire totale vaut 1 pour reconnaître une densité.
- Écrire $P(X > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ : c'est $P(X \leq t)$.
- Confondre le paramètre $\lambda$ et l'espérance $\frac{1}{\lambda}$.
- Attribuer une probabilité non nulle à une valeur exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## 6. Fiche de synthèse

| | |
|---|---|
| **Densité** | $f \geq 0$, aire totale 1 ; $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f$ ; $P(X = c) = 0$ |
| **Répartition** | $F(x) = P(X \leq x)$ ; $P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)$ |
| **Espérance** | $E(X) = \int x f(x)\,\mathrm{d}x$ ; $V(X) = \int (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ |
| **Uniforme** $[a\,;b]$ | $f = \frac{1}{b-a}$ ; $P = \frac{\text{longueur}}{b-a}$ ; $E = \frac{a+b}{2}$ ; $V = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| **Exponentielle** | $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ ; $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ ; $E = \frac{1}{\lambda}$ |
| **Sans mémoire** | $P_{X>t}(X > t + s) = P(X > s)$ |

## 7. Exercices d'application

### Exercice 1 – Une densité

Soit $f(x) = k(4 - x)$ sur $[0\,;4]$. Déterminer $k$ pour que $f$ soit une densité, puis calculer $P(X \leq 2)$ et $E(X)$.

### Exercice 2 – Loi uniforme

$X$ suit la loi uniforme sur $[2\,;10]$. Calculer $P(3 \leq X \leq 7)$, $P(X > 9)$, $E(X)$ et $V(X)$.

### Exercice 3 – Standard téléphonique

Le temps (en minutes) entre deux appels suit la loi exponentielle de paramètre 0,2. Calculer la probabilité qu'un appel arrive dans les 5 minutes, puis qu'on attende plus de 10 minutes. Quel est le temps moyen entre deux appels ? On attend déjà depuis 8 minutes : probabilité d'attendre encore plus de 2 minutes ?

## 8. Corrigés des exercices

### Corrigé de l'exercice 1

**Corrigé.** $f \geq 0$ si $k > 0$ et $\int_0^4 k(4-x)\,\mathrm{d}x = k\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8k = 1$, donc $k = \frac{1}{8}$. $P(X \leq 2) = \frac{1}{8}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{6}{8} = 0{,}75$. $E(X) = \frac{1}{8}\int_0^4 (4x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

### Corrigé de l'exercice 2

**Corrigé.** $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{4}{8} = 0{,}5$ ; $P(X > 9) = \frac{1}{8}$ ; $E(X) = 6$ ; $V(X) = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$.

### Corrigé de l'exercice 3

**Corrigé.** $P(X \leq 5) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$ ; $P(X > 10) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$ ; $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$ min. Absence de mémoire : $P_{X>8}(X > 10) = P(X > 2) = \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}670$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).