MATHÉMATIQUES

Primitives et équations différentielles

Terminale maths complémentaires

Équation différentielle • Primitive • $y' = f$ • $2uu'$, $u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$ • $y' = ay$ • $y' = ay + b$ • Solution particulière constante • Condition initiale • Méthode d'Euler

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Primitives et équations différentielles », et le thème d'étude « Modèles d'évolution ». Il couvre :

- notion de solution d'une équation différentielle, sur des exemples ;
- primitive, en lien avec l'équation $y' = f$; deux primitives diffèrent d'une constante ;
- primitives des fonctions de référence et des formes $2uu'$, $u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$;
- équation $y' = ay + b$ (a, b réels) : solution particulière constante, solution générale, allure des courbes ;
- **démonstrations** : deux primitives diffèrent d'une constante ; résolution de $y' = ay$;
- **algorithme** : méthode d'Euler.

Le programme se limite aux équations linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Objectif : déterminer des primitives, vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle et résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, en les reliant à des phénomènes physiques et biologiques.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Équations différentielles **3**

2 Primitives **3**

3 L'équation $y' = ay$ **5**

4 L'équation $y' = ay + b$ **5**

5 La méthode d'Euler **6**

6 Erreurs classiques **7**

7 Fiche de synthèse **7**

8 Exercices d'application **7**

9 Corrigés des exercices **8**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Équations différentielles

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une égalité qui relie une fonction inconnue y et sa dérivée y'. Une **solution** sur un intervalle I est une fonction f dérivable sur I qui vérifie l'égalité pour tout x de I.

Vérifier une solution

La fonction $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 1$ est-elle solution de $y' = 2y + 2$? On calcule séparément : $f'(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$ et $2f(x) + 2 = 6\mathrm{e}^{2x} - 2 + 2 = 6\mathrm{e}^{2x}$. Les deux membres sont égaux pour tout x : oui.

Pourquoi des équations différentielles ?

En physique ou en biologie, on connaît souvent la **vitesse** d'évolution d'une grandeur plutôt que la grandeur elle-même : une population croît proportionnellement à son effectif ($N' = kN$), un café refroidit d'autant plus vite qu'il est chaud ($T' = -k(T - T_a)$). Résoudre l'équation, c'est retrouver la grandeur.

2. Primitives

Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Autrement dit, F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Toutes les primitives

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (admis).

Démonstration. Si G est une autre primitive, $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I, donc $G - F$ est constante : $G = F + C$. Réciproquement, $(F + C)' = F' = f$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
k	kx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \geq 1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax} $(a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$

Reconnaître une dérivée de composée

$2u'u$ a pour primitive u^2 — $u'\mathrm{e}^u$ a pour primitive e^u — $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ $(u>0)$

On « fabrique » le facteur u' en multipliant et divisant par une constante si besoin.

Calculer des primitives

- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$: $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
- $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$: forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^2$, $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$: forme $\frac{u'}{u}$, $F(x) = \ln(x^2+1)$.
- $f(x) = 4x(x^2+3)$: forme $2u'u$ avec $u = x^2+3$, $u' = 2x$, $F(x) = (x^2+3)^2$.
- $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$: $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2x+1}$, donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.
- $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$: $F(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$.

Primitive vérifiant une condition

On écrit toutes les primitives $F(x) + C$, puis on détermine C avec la condition. Primitive de $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ qui vaut 1 en 0 : $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C$ et $F(0) = -\frac{1}{2} + C = 1$, donc $C = \frac{3}{2}$ et $F(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

Toujours dériver pour vérifier

Une primitive se **contrôle** en la dérivant. Par exemple $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$: c'est juste. Une erreur fréquente est de proposer $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$, dont la dérivée n'est pas du tout e^{x^2}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. L'équation $y' = ay$

Solutions de $y' = ay$

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pour tout x_0 et y_0, il existe une **unique** solution telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. Les fonctions $C\mathrm{e}^{ax}$ conviennent : $(C\mathrm{e}^{ax})' = aC\mathrm{e}^{ax}$. Réciproquement, soit y une solution et $g(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$. Alors $g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax} = (y'(x) - a\,y(x))\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$. g est constante, égale à un réel C, donc $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Enfin, $y(x_0) = y_0$ impose $C = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}$: une seule valeur.

Croissance d'une population (modèle de Malthus)

Une colonie de 500 bactéries croît selon $N'(t) = 0{,}3\,N(t)$ (t en heures). Donc $N(t) = C\mathrm{e}^{0{,}3t}$ et $N(0) = 500$ donne $N(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$. La population double quand $\mathrm{e}^{0{,}3t} = 2$, soit $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}31$ h.

4. L'équation $y' = ay + b$

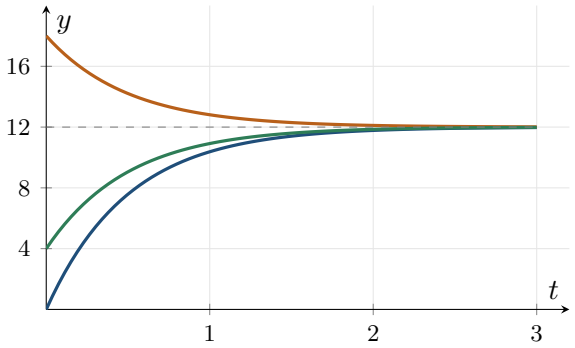
Solutions de $y' = ay + b$, $a \neq 0$

1. La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est une **solution particulière** (car $0 = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b$).
2. Les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}}$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine une unique solution.

Démonstration. y est solution $\iff$ $y' = ay + b$ $\iff$ $y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$. Posons $z = y + \frac{b}{a}$: $z' = y'$, donc y est solution si et seulement si $z' = az$, c'est-à-dire $z = C\mathrm{e}^{ax}$, soit $y = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.

Allure des courbes

Si $a < 0$, $\mathrm{e}^{ax} \to 0$ quand $x \to +\infty$: toutes les solutions tendent vers la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$ (asymptote horizontale). Si $a > 0$, les solutions s'en éloignent, sauf la solution constante.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Trois solutions de $y' = -2y + 24$: elles tendent toutes vers l'équilibre $y = 12$.

Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC alimenté par une tension $E = 12$ V, avec $RC = 0{,}5$ s, la tension aux bornes du condensateur vérifie $u' = -2u + 24$ et $u(0) = 0$. Solution particulière : $-\frac{24}{-2} = 12$. Donc $u(t) = C\mathrm{e}^{-2t} + 12$ et $u(0) = 0$ donne $C = -12$:

$$u(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$

Après 1,5 s ($3RC$), $u \approx 11{,}4$ V : le condensateur est chargé à 95 %.

Loi de refroidissement de Newton

Un café à 90 °C refroidit dans une pièce à 20 °C selon $T' = -0{,}1(T - 20)$, t en minutes, soit $T' = -0{,}1T + 2$. Équilibre : 20 ; $T(t) = 20 + C\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ et $T(0) = 90$ donne $C = 70$. Le café atteint 50 °C quand $70\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 30$, soit $t = 10\ln\frac{7}{3} \approx 8{,}5$ min.

Chute dans un fluide visqueux

La vitesse d'une bille qui tombe dans de l'huile vérifie $v' = 9{,}8 - 0{,}5v$ et $v(0) = 0$. Équilibre : $v = 19{,}6$ m/s ; $v(t) = 19{,}6\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}5t}\right)$. La vitesse tend vers une **vitesse limite** de 19,6 m/s ; après 4 s, $v \approx 16{,}9$ m/s.

Une équation non linéaire : la logistique

Le modèle de Verhulst continu $y' = ay(b-y)$ n'est pas au programme des connaissances exigibles. On vérifie seulement, sur un exemple, qu'une fonction donnée en est solution, par exemple $y = \dfrac{b}{1 + k\mathrm{e}^{-abx}}$.

5. La méthode d'Euler

Résolution approchée

Pour $y' = F(y)$ et $y(0) = y_0$, on avance par petits pas h en suivant la tangente : $y(t + h) \approx y(t) + h\,y'(t)$. On construit ainsi $y_{n+1} = y_n + h\,F(y_n)$, approximation de $y(nh)$.

```
def euler(F, y0, h, n):
    y = y0
    for k in range(n):
        y = y + h * F(y)
    return y
```

Euler pour le refroidissement

$T' = -0{,}1(T - 20)$, $T(0) = 90$, pas $h = 1$: $T_1 = 90 - 0{,}1 \times 70 = 83$; $T_2 = 76{,}7$; $T_3 \approx 71{,}03$. Valeurs exactes : 83,34 ; 77,31 ; 71,86. On retrouve le modèle discret $T_{n+1} = 0{,}9T_n + 2$ du chapitre sur les suites : la méthode d'Euler fait le lien entre modèle **discret** et modèle **continu**. Avec $y' = y$, $y(0) = 1$ et $h = 0{,}1$, dix pas donnent $1{,}1^{10} \approx 2{,}594$ pour $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier la constante C : une fonction a une infinité de primitives.
- Écrire la solution de $y' = ay + b$ sous la forme $Ce^{ax} + \frac{b}{a}$: la solution constante est $-\frac{b}{a}$ (vérifier $0 = a\ell + b$).
- Déterminer C avant d'ajouter la solution particulière : la condition initiale s'applique à la solution **complète**.
- Confondre $y' = ay$ (solutions Ce^{ax}) et $y' = a$ (solutions $ax + C$).

7. Fiche de synthèse

Primitive	$F' = f$; toutes les primitives : $F + C$
Usuelles	$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{1}{x} \to \ln x$; $e^{ax} \to \frac{1}{a}e^{ax}$; $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$
Composées	$2u'u \to u^2$; $u'e^u \to e^u$; $\frac{u'}{u} \to \ln u$
$y' = ay$	$y = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$	$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; si $a < 0$, limite $-\frac{b}{a}$
Condition initiale	une seule solution vérifie $y(x_0) = y_0$
Euler	$y_{n+1} = y_n + h\,F(y_n)$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Primitives

Déterminer une primitive de : a) $f(x) = 6x^2 - 2x + 5$; b) $g(x) = 3e^{3x-1}$; c) $h(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$ sur $]0\,;+\infty[$; d) $k(x) = x\,e^{x^2}$.

Exercice 2 – Vérifier

Montrer que $f(x) = 3e^{3x} - 2$ est solution de $y' = 3y + 6$ et vérifie $f(0) = 1$.

Exercice 3 – Perfusion

Un patient sous perfusion reçoit 2 mg de médicament par heure ; son organisme en élimine 25 % par heure. La quantité $Q(t)$ (en mg) vérifie $Q' = -0{,}25\,Q + 2$ et $Q(0) = 0$.

1. Résoudre cette équation.
2. Vers quelle quantité $Q(t)$ tend-elle ? Au bout de combien de temps atteint-elle 6 mg ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $F(x) = 2x^3 - x^2 + 5x$. b) $G(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$). c) $H(x) = \ln(x^3+1)$ (forme $\frac{u'}{u}$). d) $x\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2}$, donc $K(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = 9\mathrm{e}^{3x}$ et $3f(x)+6 = 9\mathrm{e}^{3x}-6+6 = 9\mathrm{e}^{3x}$: égalité pour tout x. Et $f(0) = 3-2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. 1. Solution constante : $-\frac{2}{-0{,}25} = 8$. $Q(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}25t} + 8$ et $Q(0) = 0$ donne $C = -8$: $Q(t) = 8\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25t}\right)$. 2. $\mathrm{e}^{-0{,}25t} \to 0$, donc $Q(t) \to 8$ mg. $Q(t) = 6 \iff \mathrm{e}^{-0{,}25t} = \frac{1}{4} \iff t = 4\ln 4 \approx 5{,}5$ h.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).