MATHÉMATIQUES

Probabilités conditionnelles et formule de Bayes

Terminale maths complémentaires

Probabilité conditionnelle $P_A(B)$ • Arbre pondéré • Probabilités totales • Formule de Bayes • A priori, a posteriori • Test de dépistage • Sensibilité, spécificité • Valeur prédictive

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, contenus repris par l'arrêté du 26 février 2026 pour la rentrée 2027), thème d'étude « Inférence bayésienne » et partie « Probabilités et statistique » (calcul de probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles). Il couvre :

- probabilités conditionnelles, arbres pondérés, formule des probabilités totales, indépendance (rappels de première) ;
- inversion du conditionnement : formule de Bayes ; probabilité *a priori* et *a posteriori* ;
- tests binaires de diagnostic : vrais et faux positifs ou négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive et négative ;
- étude d'une valeur prédictive en fonction de la proportion de malades ; problèmes « de quelle urne vient la boule ? ».

Bien distinguer $P_B(A)$ de $P_A(B)$ est l'objectif majeur de ce chapitre.

Objectif : calculer des probabilités conditionnelles avec un arbre ou un tableau, inverser un conditionnement avec la formule de Bayes et interpréter les résultats d'un test de dépistage.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Probabilités conditionnelles (rappels) 3

2 Inverser le conditionnement : la formule de Bayes 3

3 Les tests de dépistage 4

4 Erreurs classiques 6

5 Fiche de synthèse 6

6 Exercices d'application 6

7 Corrigés des exercices 6

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Probabilités conditionnelles (rappels)

Probabilité de B sachant A

Si $P(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}, \qquad \text{donc} \qquad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

C'est la probabilité de B quand on **sait** que A est réalisé : on restreint l'univers à A.

Règles de l'arbre pondéré

- La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.
- La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

Formule des probabilités totales

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers (événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers), de probabilités non nulles :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Avec A et $\overline{A}$: $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

Indépendance

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, c'est-à-dire (si $P(A) \neq 0$) $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

2. Inverser le conditionnement : la formule de Bayes

Formule de Bayes

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}}$$

et, en développant $P(B)$ par les probabilités totales :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}.$$

Démonstration. $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ et aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. En égalant puis en divisant par $P(B)$, on obtient la formule.

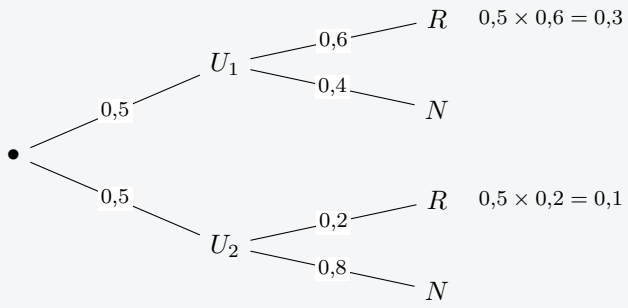
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

A priori, a posteriori

A représente la question qui nous intéresse (« le patient est malade », « la boule vient de l'urne 1 »). Sa probabilité $P(A)$ avant toute observation est dite **a priori**. Après l'observation d'un événement B, on la remplace par $P_B(A)$, dite **a posteriori**. La formule de Bayes est la règle de mise à jour d'une croyance par une information.

De quelle urne vient la boule ?

On lance une pièce équilibrée : pile, on tire dans l'urne U_1 (3 rouges, 2 noires) ; face, dans l'urne U_2 (1 rouge, 4 noires). On a tiré une boule rouge. Probabilité qu'elle vienne de U_1 ?



$P(R) = 0{,}3+0{,}1 = 0{,}4$ et $P_R(U_1) = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$. L'observation « rouge » fait passer la probabilité de U_1 de 0,5 (a priori) à 0,75 (a posteriori).

Contrôle qualité

Une usine a deux machines : M_1 produit 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses ; M_2 produit le reste, avec 5 % de défauts. $P(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}032$. Une pièce est défectueuse : la probabilité qu'elle vienne de M_2 est $P_D(M_2) = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}05}{0{,}032} = 0{,}625$. M_2 fait 40 % des pièces mais 62,5 % des défauts.

Le tableau d'effectifs

On peut aussi raisonner sur une population fictive de 10 000 individus, en remplissant un tableau à double entrée avec les effectifs. Les probabilités conditionnelles deviennent des proportions dans une ligne ou une colonne : c'est souvent plus parlant que la formule.

3. Les tests de dépistage

Vocabulaire d'un test binaire

On note M « la personne est malade » et T « le test est positif ».

- **Vrai positif** : malade et test positif ; **faux positif** : non malade et test positif ; de même pour les vrais et faux négatifs.
- **Sensibilité** $= P_M(T)$: probabilité qu'un malade soit détecté.
- **Spécificité** $= P_{\overline{M}}(\overline{T})$: probabilité qu'un non-malade ait un test négatif.
- **Prévalence** $= P(M)$: proportion de malades dans la population testée.
- **Valeur prédictive positive** VPP $= P_T(M)$; **valeur prédictive négative** VPN $=$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P_{\overline{T}}(\overline{M})$.

Sensibilité et spécificité sont des qualités **du test** ; les valeurs prédictives, qui intéressent le patient, dépendent aussi de la **prévalence**.

Un test excellent... et pourtant

Une maladie touche 1 % de la population. Un test a une sensibilité de 95 % et une spécificité de 98 %. Sur 10 000 personnes :

	Test positif	Test négatif	Total
Malades	95	5	100
Non malades	198	9 702	9 900
Total	293	9 707	10 000

VPP $= P_T(M) = \dfrac{95}{293} \approx 0{,}324$: seul un tiers des tests positifs correspond à un malade ! En revanche VPN $= \dfrac{9\,702}{9\,707} \approx 0{,}9995$: un test négatif est très rassurant. Avec la formule : $P(T) = 0{,}01 \times 0{,}95 + 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0293$ et $P_T(M) = \dfrac{0{,}0095}{0{,}0293}$.

Pourquoi ce résultat surprend

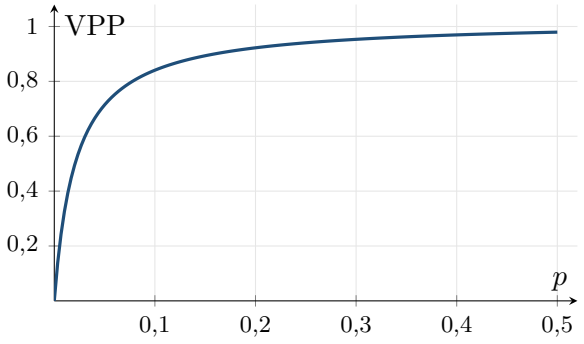
Les malades sont si rares que les 2 % de faux positifs chez les 9 900 non-malades (198 personnes) sont plus nombreux que les vrais positifs (95). C'est pourquoi on confirme un test positif par un second test : si les deux tests sont indépendants, la probabilité a posteriori 0,324 devient l'a priori du second, et un second test positif la porte à environ 0,958.

La VPP en fonction de la prévalence

Avec la même sensibilité et la même spécificité, pour une prévalence p :

$$f(p) = P_T(M) = \frac{0{,}95p}{0{,}95p + 0{,}02(1-p)} = \frac{0{,}95p}{0{,}93p + 0{,}02}, \quad p \in [0\,;1].$$

$f'(p) = \dfrac{0{,}95(0{,}93p + 0{,}02) - 0{,}95p \times 0{,}93}{(0{,}93p + 0{,}02)^2} = \dfrac{0{,}019}{(0{,}93p + 0{,}02)^2} > 0$: la VPP **augmente avec la prévalence**. $f(0{,}001) \approx 0{,}045$; $f(0{,}01) \approx 0{,}324$; $f(0{,}1) \approx 0{,}841$; $f(0{,}5) \approx 0{,}979$. Un même test est bien plus fiable chez des patients qui présentent déjà des symptômes (forte prévalence) qu'en dépistage de masse.



Valeur prédictive positive d'un test (sensibilité 0,95, spécificité 0,98) selon la prévalence p.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre $P_M(T)$ (sensibilité, qualité du test) et $P_T(M)$ (valeur prédictive, ce que veut savoir le patient) : c'est l'erreur dite « du procureur » en justice, qui confond « probabilité de l'indice si l'accusé est innocent » et « probabilité que l'accusé soit innocent vu l'indice ».
- Oublier les faux positifs au dénominateur : $P(T)$ se calcule avec les probabilités totales.
- Écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ sans indépendance.
- Additionner des probabilités conditionnelles qui ne portent pas sur le même événement conditionnant.

5. Fiche de synthèse

Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$
Bayes	$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$; a priori $P(A)$, a posteriori $P_B(A)$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Test	sensibilité $P_M(T)$; spécificité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$; prévalence $P(M)$
Valeurs prédictives	VPP $= P_T(M)$; VPN $= P_{\overline{T}}(\overline{M})$; la VPP croît avec la prévalence

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Dopage

3 % des sportifs d'une compétition sont dopés. Le test utilisé a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 95 %. Un sportif est contrôlé positif : quelle est la probabilité qu'il soit dopé ? Commenter.

Exercice 2 – Filtre anti-spam

40 % des courriels reçus sont des spams. Le mot « gratuit » apparaît dans 30 % des spams et dans 2 % des autres courriels. Un courriel contient « gratuit » : quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

Exercice 3 – Valeur prédictive négative

Avec le test de la section 3 (sensibilité 0,95, spécificité 0,98) et une prévalence p, exprimer VPN $= P_{\overline{T}}(\overline{M})$ en fonction de p, puis la calculer pour $p = 0{,}2$.

7. Corrigés des exercices

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $P(T) = 0{,}03 \times 0{,}9 + 0{,}97 \times 0{,}05 = 0{,}027 + 0{,}0485 = 0{,}0755$. $P_T(D) = \dfrac{0{,}027}{0{,}0755} \approx 0{,}358$. Près de deux contrôles positifs sur trois concernent un sportif non dopé : un test positif doit être confirmé par une contre-expertise.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $P(G) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}12 + 0{,}012 = 0{,}132$. $P_G(S) = \dfrac{0{,}12}{0{,}132} \approx 0{,}909$. Les filtres bayésiens combinent ainsi des dizaines de mots.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $P(\overline{T}) = p \times 0{,}05 + (1-p) \times 0{,}98$ et $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}98(1-p)$, donc $\text{VPN} = \dfrac{0{,}98(1-p)}{0{,}98(1-p) + 0{,}05p} = \dfrac{0{,}98 - 0{,}98p}{0{,}98 - 0{,}93p}$. Pour $p = 0{,}2$: $\dfrac{0{,}784}{0{,}794} \approx 0{,}987$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).