MATHÉMATIQUES

Suites et modèles d'évolution

Terminale maths complémentaires

Limite d'une suite • Suite géométrique • $\lim q^n$ • Somme $1 + q + \cdots + q^n$
Suite arithmético-géométrique • Point fixe • $u_{n+1} = f(u_n)$ • Seuil • Modèles d'évolution

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale** (arrêté du 19 juillet 2019, repris sans changement de contenu par l'arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, pour la rentrée 2027), partie « Analyse », section « Suites numériques, modèles discrets », et le thème d'étude « Modèles d'évolution ». Il couvre :

- approche intuitive de la limite, finie ou infinie, d'une suite ; opérations sur les limites, passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes ;
- limite d'une suite géométrique de raison positive ; limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $0 < q < 1$;
- suites arithmético-géométriques : solution constante, puis toutes les solutions ;
- représentation graphique d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et conjecture de son comportement ;
- **algorithmes** : calcul des termes, recherche de seuil, valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

Prérequis (première) : suites arithmétiques et géométriques, sens de variation d'une suite.

Objectif : modéliser une évolution par une suite, calculer la limite d'une suite géométrique et de la somme de ses termes, et étudier une suite arithmético-géométrique à l'aide de sa solution constante.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Modéliser une évolution par une suite **3**

2 Limite d'une suite : approche intuitive **3**

3 Suites géométriques : limite et somme **4**

4 Représenter une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ **5**

5 Suites arithmético-géométriques **6**

6 Algorithmes **7**

7 Erreurs classiques **8**

8 Fiche de synthèse **8**

9 Exercices d'application **8**

10 Corrigés des exercices **9**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Modéliser une évolution par une suite

Deux façons de définir une suite

— Par une **formule explicite** $u_n = f(n)$: on calcule directement n'importe quel terme, par exemple $u_n = 500 \times 1{,}02^n$.

— Par une **relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$ et un premier terme u_0 : chaque terme se calcule à partir du précédent.

Les deux modèles de référence (rappels de première)

— Évolution **à quantité constante** : $u_{n+1} = u_n + r$, suite **arithmétique**, $u_n = u_0 + nr$.

— Évolution **à taux constant** t : $u_{n+1} = (1+t)\,u_n$, suite **géométrique** de raison $q = 1+t$, $u_n = u_0\,q^n$.

Traduire un énoncé

— Une ville de 12 000 habitants perd 1,5 % de sa population par an : $p_{n+1} = 0{,}985\,p_n$, $p_0 = 12\,000$, donc $p_n = 12\,000 \times 0{,}985^n$.

— Un patient reçoit 10 mL d'un médicament chaque jour ; son corps en élimine 30 % par jour. Si u_n est la quantité présente juste après la n-ième prise : $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 10$. Ce n'est ni arithmétique ni géométrique : c'est une suite **arithmético-géométrique** (section 5).

2. Limite d'une suite : approche intuitive

Limite finie, limite infinie

— La suite (u_n) a pour **limite le réel** ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut dès que n est assez grand. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$; on dit que la suite **converge** vers ℓ.

— La suite a pour limite $+\infty$ si les termes deviennent aussi grands que l'on veut dès que n est assez grand (de même pour $-\infty$). Une suite qui ne converge pas **diverge**.

Les suites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim n^2 = +\infty$, $\lim \sqrt{n} = +\infty$, $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$. La suite $(-1)^n$ (qui vaut $1, -1, 1, -1, \dots$) n'a pas de limite : elle diverge sans tendre vers l'infini.

Opérations sur les limites (admises)

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ (réels), alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$, et $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$. Avec l'infini : $+\infty + \ell = +\infty$; $+\infty \times \ell = +\infty$ si $\ell > 0$; $\dfrac{\ell}{\pm\infty} = 0$. Les cas « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » sont des **formes indéterminées** : il faut transformer l'écriture.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Lever une indétermination

$u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$: on factorise par n en haut et en bas, $u_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$, et comme $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{2}{n} \to 0$: $\lim u_n = \dfrac{3}{1} = 3$.

Comparaison et gendarmes (admis)

- **Passage à la limite** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.
- **Comparaison** : si $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- **Gendarmes** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Gendarmes

$u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$: $2 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$. Les deux encadrants tendent vers 2, donc $\lim u_n = 2$.

3. Suites géométriques : limite et somme

Limite de q^n, $q > 0$

$$\boxed{0 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \qquad q = 1 \Rightarrow q^n = 1 \qquad q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$$

Pour $u_n = u_0\, q^n$ avec $u_0 > 0$: la suite tend vers 0 si $0 < q < 1$ et vers $+\infty$ si $q > 1$.

Interpréter

$p_n = 12\,000 \times 0{,}985^n$: $0 < 0{,}985 < 1$, donc $\lim p_n = 0$. Le modèle prédit la disparition de la ville à très long terme : il n'est sans doute valable que sur quelques années. Avec $u_n = 3 \times 0{,}8^n$: $u_{10} \approx 0{,}32$ et $u_{20} \approx 0{,}035$; la suite tend vers 0.

Somme des termes d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$ et tout entier n :

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Plus généralement, la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique vaut premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Limite de la somme quand $0 < q < 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(1+q+\cdots+q^n)=\frac{1}{1-q}} \qquad (0<q<1).$$

Démonstration. $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Comme $0 < q < 1$, $q^{n+1} \to 0$, donc $1-q^{n+1} \to 1$, et par quotient par le nombre fixe $1-q \neq 0$: $S_n \to \dfrac{1}{1-q}$.

Le paradoxe de la flèche

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$: avec $q=\frac{1}{2}$, la somme tend vers $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Pour $n=10$ elle vaut déjà $\dfrac{1-0{,}5^{11}}{0{,}5}\approx 1{,}999$. Une infinité de distances peut donc avoir une somme finie.

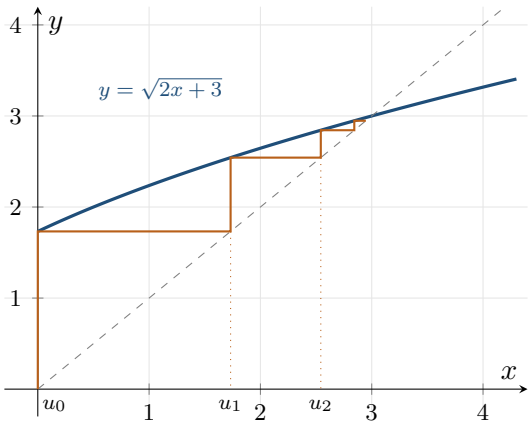
Médicament : la dose qui s'accumule

On prend chaque jour une dose D ; il en reste la fraction q $(0<q<1)$ d'un jour à l'autre. Juste après la $(n+1)$-ième prise, il reste $D(1+q+\cdots+q^n)$. À long terme, la quantité se stabilise vers $\dfrac{D}{1-q}$: avec $D=10$ mL et $q=0{,}7$, environ 33,3 mL.

4. Représenter une suite $u_{n+1}=f(u_n)$

Construction en escalier

On trace la courbe de f et la droite $y=x$. On place u_0 sur l'axe des abscisses ; on monte jusqu'à la courbe : l'ordonnée obtenue est $u_1=f(u_0)$. On rejoint horizontalement la droite $y=x$ pour reporter u_1 en abscisse, puis on recommence. Les abscisses successives $u_0, u_1, u_2, \ldots$ permettent de **conjecturer** le sens de variation et la limite.



$u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$: l'escalier monte vers le point d'intersection de la courbe et de la droite $y=x$, d'abscisse 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conjecturer puis vérifier

Avec $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 0$: $u_1 \approx 1{,}732$, $u_2 \approx 2{,}543$, $u_3 \approx 2{,}843$, $u_4 \approx 2{,}947$. On conjecture que la suite est croissante et converge vers 3. Le nombre 3 est bien le **point fixe** de f : $f(3) = \sqrt{9} = 3$.

Limite et point fixe (admise)

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, et si la suite converge vers ℓ, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On cherche donc les limites possibles parmi les solutions de $f(x) = x$.

Le modèle de Verhulst

Une population qui croît vite quand elle est petite et plafonne près d'une capacité k se modélise par $N_{t+1} = N_t + r\,N_t(k - N_t)$. Le point fixe non nul est k : l'escalier s'en approche quand r est petit ; pour un r trop grand, la suite oscille, voire devient chaotique, ce qu'un tableur montre très bien.

5. Suites arithmético-géométriques

Suite arithmético-géométrique

Une suite vérifiant $u_{n+1} = a\,u_n + b$ (avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$) est dite **arithmético-géométrique**. Elle modélise une évolution « à taux constant plus apport constant » : capital avec versements, emprunt, médicament, refroidissement.

Étudier $u_{n+1} = au_n + b$

1. Chercher la **solution constante** ℓ : elle vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$. En soustrayant $\ell = a\ell + b$ à $u_{n+1} = au_n + b$: $v_{n+1} = a\,v_n$. La suite (v_n) est **géométrique** de raison a.
3. Donc $v_n = v_0\,a^n$ et $\boxed{u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n}$.
4. Si $0 < a < 1$, $a^n \to 0$ et $\lim u_n = \ell$.

Le médicament

$u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 10$, $u_0 = 0$. Solution constante : $\ell = 0{,}7\ell + 10 \iff 0{,}3\ell = 10 \iff \ell = \dfrac{100}{3}$. Avec $v_n = u_n - \frac{100}{3}$, géométrique de raison 0,7 et $v_0 = -\frac{100}{3}$:

$$u_n = \frac{100}{3}\left(1 - 0{,}7^n\right).$$

Contrôle : $u_1 = 10$, $u_2 = 17$, $u_3 = 21{,}9$. Comme $0{,}7^n \to 0$, la quantité se stabilise vers $\frac{100}{3} \approx 33{,}3$ mL, comme à la section 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Loi de refroidissement de Newton, modèle discret

Un café à 90 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Chaque minute, l'écart avec la pièce diminue de 10 % : $T_{n+1} - 20 = 0{,}9\,(T_n - 20)$, soit $T_{n+1} = 0{,}9\,T_n + 2$. La solution constante est 20 et $T_n = 20 + 70 \times 0{,}9^n$: $T_{10} \approx 44{,}4$ °C, et $\lim T_n = 20$ °C.

Rembourser un emprunt

On emprunte 10 000 € à 0,5 % par mois et l'on rembourse 200 € par mois. Le capital restant dû vérifie $c_{n+1} = 1{,}005\,c_n - 200$. Solution constante : $\ell = 1{,}005\ell - 200 \iff \ell = 40\,000$. Donc $c_n = 40\,000 - 30\,000 \times 1{,}005^n$. La dette est remboursée quand $c_n \leq 0$, c'est-à-dire $1{,}005^n \geq \frac{4}{3}$: la calculatrice (ou l'algorithme de seuil) donne $c_{57} \approx 135$ € et $c_{58} < 0$: 58 mensualités, la dernière incomplète.

Le point fixe n'est pas toujours la limite

Si $a > 1$ (emprunt ci-dessus), $a^n \to +\infty$ et la suite s'éloigne de ℓ : $c_n \to -\infty$ (au sens du modèle). La limite vaut ℓ seulement si $0 < a < 1$.

6. Algorithmes

Recherche de seuil

Au bout de combien de mois la dette $c_n = 40\,000 - 30\,000 \times 1{,}005^n$ est-elle remboursée ?

```
def seuil():
    c = 10000
    n = 0
    while c > 0:
        c = 1.005 * c - 200
        n = n + 1
    return n
```

`seuil()` renvoie `58`. Le principe est toujours le même : on répète le calcul du terme suivant **tant que** la condition n'est pas atteinte.

Valeur approchée de $\sqrt{2}$ (méthode de Héron)

La suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ a pour point fixe positif $\sqrt{2}$ (car $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}) \iff \ell^2 = 2$). Elle converge très vite : $u_1 = 1{,}5$; $u_2 \approx 1{,}416\,67$; $u_3 \approx 1{,}414\,216$, déjà juste à 10^{-5} près.

```
def heron(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = (u + 2 / u) / 2
    return u
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Erreurs classiques

À éviter

- Écrire $u_n = u_0 + nr$ pour une évolution en pourcentage : un taux constant donne une suite **géométrique**.
- Confondre $0{,}9^n$ (qui tend vers 0) et $1{,}1^n$ (qui tend vers $+\infty$) : on compare la raison à 1.
- Oublier un terme dans une somme géométrique : $1 + q + \cdots + q^n$ compte $n+1$ termes, d'où q^{n+1}.
- Utiliser $\frac{1}{1-q}$ quand $q \geq 1$: la somme tend alors vers $+\infty$.
- Dire qu'une suite arithmético-géométrique tend vers son point fixe sans vérifier $0 < a < 1$.

8. Fiche de synthèse

Modèles	quantité constante : arithmétique ; taux constant : géométrique $u_n = u_0 q^n$
Limite de q^n	$0 < q < 1$: 0 ; $q = 1$: 1 ; $q > 1$: $+\infty$
Somme	$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; tend vers $\frac{1}{1-q}$ si $0 < q < 1$
Gendarmes	$v_n \leq u_n \leq w_n$, $v_n \to \ell$, $w_n \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$
$u_{n+1} = au_n + b$	$\ell = \frac{b}{1-a}$; $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$; limite ℓ si $0 < a < 1$
$u_{n+1} = f(u_n)$	escalier avec $y = x$; limite possible : solution de $f(\ell) = \ell$

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Limites

Déterminer la limite de : a) $u_n = 5 \times 1{,}2^n$; b) $v_n = 8 - 3 \times 0{,}6^n$; c) $w_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$.

Exercice 2 – Somme géométrique

Calculer $S = 1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \cdots + 0{,}9^{20}$ (au centième), puis la limite de $1 + 0{,}9 + \cdots + 0{,}9^n$.

Exercice 3 – Épargne

Lina place 1 000 € à 2 % par an et ajoute 500 € à la fin de chaque année : $u_{n+1} = 1{,}02\,u_n + 500$, $u_0 = 1\,000$.

1. Déterminer la solution constante ℓ, puis exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle somme possède-t-elle au bout de 10 ans (à l'euro près) ? Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 4 – Population de poissons

Un lac contient 5 000 poissons ; chaque année, 20 % meurent ou sont pêchés et l'on en réintroduit 600.

1. Écrire la relation entre p_{n+1} et p_n.
2. Montrer que $p_n = 3\,000 + 2\,000 \times 0{,}8^n$ et donner la limite de (p_n). Interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $1{,}2 > 1$ donc $1{,}2^n \to +\infty$ et $u_n \to +\infty$. b) $0 < 0{,}6 < 1$ donc $0{,}6^n \to 0$ et $v_n \to 8$. c) $w_n = \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \to 2$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. 21 termes : $S = \dfrac{1 - 0{,}9^{21}}{1 - 0{,}9} = 10\left(1 - 0{,}9^{21}\right) \approx 8{,}91$. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, la somme tend vers $\dfrac{1}{1 - 0{,}9} = 10$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. 1. $\ell = 1{,}02\ell + 500 \iff -0{,}02\ell = 500 \iff \ell = -25\,000$. Donc $u_n = -25\,000 + 26\,000 \times 1{,}02^n$. 2. $u_{10} = -25\,000 + 26\,000 \times 1{,}02^{10} \approx 6\,694$ €. Comme $1{,}02 > 1$, $1{,}02^n \to +\infty$ et $u_n \to +\infty$ (ici le point fixe, négatif, n'est pas la limite).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. 1. $p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 600$, $p_0 = 5\,000$. 2. Solution constante : $\ell = 0{,}8\ell + 600 \iff \ell = 3\,000$; $p_n - 3\,000$ est géométrique de raison $0{,}8$ et de premier terme $2\,000$, d'où $p_n = 3\,000 + 2\,000 \times 0{,}8^n$. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $\lim p_n = 3\,000$: la population se stabilise autour de $3\,000$ poissons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).