Plaquette 4 – Démontrer : disjonction de cas, récurrence et non-existence

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes de démonstration en arithmétique.

- **Disjonction de cas.** Tout entier n est congru modulo p à l'un des restes $0, 1, \ldots, p-1$. Pour démontrer une propriété valable pour **tout** entier, il suffit donc de la vérifier sur ces p cas, présentés dans un tableau.
- Restes à connaître par cœur :

$$x^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 3 \qquad x^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \qquad x^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 4 \pmod 8$$

- **Récurrence.** Pour montrer que $P(n)$: « $a \mid u_n$ » est vraie pour tout $n \geq n_0$:
- **initialisation** : on vérifie $P(n_0)$ par le calcul ;
- **hérédité** : on suppose $u_n = ak$ et on écrit u_{n+1} **en fonction de** u_n, sous la forme $u_{n+1} = \alpha u_n + a \times (\ldots)$;
- **conclusion** : P est vraie pour tout $n \geq n_0$.
- **Alternative aux récurrences de puissances** : si $a \equiv b \pmod n$, alors $a^k \equiv b^k \pmod n$. Une divisibilité du type $11^k - 4^k$ se traite en une ligne modulo 7.
- **Non-existence.** Pour montrer qu'une équation n'a pas de solution entière, on la réduit modulo un entier bien choisi (3, 4, 8 ou 9 selon les puissances en jeu) et on exhibe une **contradiction** entre les restes possibles des deux membres.
- **Écriture décimale** : $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. C'est la traduction qui permet de démontrer les critères et les « tours de magie » numériques.

Correction de l'exercice 1 – Parité d'une expression

Disjonction de cas selon la parité de n : tout entier est congru à 0 ou à 1 modulo 2.

- **Cas 1 :** n **pair**, $n = 2k$. Alors $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$: c'est un multiple de 2.
- **Cas 2 :** n **impair**, $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 + n = (2k+1)^2 + (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

- C'est encore un multiple de 2.

Conclusion. Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair.

- **Démonstration plus courte** : $n^2 + n = n(n+1)$ est le produit de deux entiers **consécutifs**, dont l'un est nécessairement pair.
- Contrôle : $n = 7$ donne 56 ✓, $n = -4$ donne 12 ✓.

Réponse. $n^2 + n = n(n+1)$ est pair dans les deux cas de parité.

Correction de l'exercice 2 – Deux méthodes pour une divisibilité

a) **Par les congruences** — la voie la plus rapide.

- $4 = 3 + 1$, donc $4 \equiv 1 \pmod 3$.
- Par compatibilité avec les puissances : $4^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$.
- Donc $4^n + 5 \equiv 1 + 5 = 6 \equiv 0 \pmod 3$: le nombre est divisible par 3.

b) **Par récurrence.** On note $P(n)$: « 3 divise $4^n + 5$ ».

— **Initialisation** : pour $n = 0$, $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$: $P(0)$ est vraie.
— **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $4^n + 5 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
— Alors $4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4(4^n + 5) - 20 + 5 = 4 \times 3k - 15$.
— Soit $4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5)$: c'est un multiple de 3, donc $P(n+1)$ est vraie.
— **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— Contrôle : $4^3 + 5 = 69 = 3 \times 23$ ✓.

Réponse. $4^n + 5 \equiv 1 + 5 \equiv 0 \pmod 3$; par récurrence, $4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5)$.

Correction de l'exercice 3 – Une différence de puissances

On observe que les deux bases sont congrues entre elles modulo 7 :

— $11 = 7 + 4$, donc $11 \equiv 4 \pmod 7$.
— Par compatibilité avec les puissances : $11^n \equiv 4^n \pmod 7$.
— Donc $11^n - 4^n \equiv 0 \pmod 7$: la différence est divisible par 7.

Contrôle numérique.

— $n = 2$: $121 - 16 = 105 = 7 \times 15$ ✓.
— $n = 3$: $1\,331 - 64 = 1\,267 = 7 \times 181$ ✓.
— **À retenir** : $a^n - b^n$ est toujours divisible par $a - b$; ici $11 - 4 = 7$, ce qui explique le résultat sans aucun calcul.

Réponse. $11 \equiv 4 \pmod 7$ donc $11^n - 4^n \equiv 0 \pmod 7$.

Correction de l'exercice 4 – Une condition sur la parité de l'exposant

On remarque que 2 est congru à -1 modulo 3 : c'est l'astuce qui donne un **cycle de longueur 2**.

— $2 \equiv -1 \pmod 3$, donc $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$.
— **Cas 1 : n pair.** $(-1)^n = 1$, donc $2^n + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$: pas divisible.
— **Cas 2 : n impair.** $(-1)^n = -1$, donc $2^n + 1 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3$: divisible.

Conclusion. 3 divise $2^n + 1$ **si et seulement si** n est impair.

— Contrôle : $2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3$ ✓ (n impair) ; $2^4 + 1 = 17$, non divisible par 3 ✓ (n pair).
— Le même raisonnement montre que $2^n - 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est **pair**.

Réponse. $3 \mid (2^n + 1)$ si et seulement si n est impair.

Correction de l'exercice 5 – Récurrence : divisibilité par 8

On note $P(n)$: « 8 divise $3^{2n} - 1$ ». On remarque d'abord que $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$.

Initialisation ($n = 0$) :

— $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 8 \times 0$: 0 est divisible par 8, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie : $9^n - 1 = 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— $9^{n+1} - 1 = 9 \times 9^n - 1$.
— On fait apparaître l'hypothèse de récurrence :
$9 \times 9^n - 1 = 9(9^n - 1) + 9 - 1 = 9 \times 8k + 8$.
— Donc $9^{n+1} - 1 = 8(9k + 1)$: c'est un multiple de 8, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Contrôle : $n = 2$ donne $81 - 1 = 80 = 8 \times 10$ ✓.
— Par les congruences : $9 \equiv 1 \pmod 8$ donc $9^n \equiv 1$, en une ligne.

Réponse. $9^{n+1} - 1 = 8(9k + 1)$: l'hérédité est vérifiée.

Correction de l'exercice 6 – Récurrence : divisibilité par 6

On note $P(n)$: « 6 divise $7^n - 1$ ».

Initialisation ($n = 0$) : $7^0 - 1 = 0$, multiple de 6. $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $7^n - 1 = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$.

— $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1$.
— On force l'apparition de $7^n - 1$:

$$7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 7 - 1 = 7 \times 6k + 6$$

— Donc $7^{n+1} - 1 = 6(7k + 1)$, multiple de 6 : $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— **Le geste clé de toute hérédité de divisibilité** : ajouter et retrancher ce qu'il faut pour faire apparaître le terme précédent, ici $+7 - 1$ au lieu de -1.
— Contrôle : $7^3 - 1 = 342 = 6 \times 57$ ✓.

Réponse. $7^{n+1} - 1 = 6(7k + 1)$: hérédité vérifiée, la propriété est vraie pour tout n.

Correction de l'exercice 7 – Récurrence avec deux puissances

On note $P(n)$: « 8 divise u_n ».

Initialisation ($n = 1$) : $u_1 = 5 + 2 \times 3^0 + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$, divisible par 8 ✓.

Hérédité. Supposons $u_n = 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On calcule u_{n+1} en le rapprochant de $5u_n$:

— $u_{n+1} = 5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1 = 5 \times 5^n + 6 \times 3^{n-1} + 1$.
— $5u_n = 5 \times 5^n + 10 \times 3^{n-1} + 5$.
— Par différence :
$u_{n+1} - 5u_n = (6 - 10) \times 3^{n-1} + (1 - 5) = -4 \times 3^{n-1} - 4 = -4\left(3^{n-1} + 1\right)$.
— Or 3^{n-1} est **impair**, donc $3^{n-1} + 1$ est pair : $3^{n-1} + 1 = 2m$.
— Ainsi $u_{n+1} = 5u_n - 8m = 5 \times 8k - 8m = 8(5k - m)$: $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $8 \mid u_n$ pour tout $n \geq 1$.

— Contrôle : $u_2 = 25 + 6 + 1 = 32 = 8 \times 4$ ✓ · $u_3 = 125 + 18 + 1 = 144 = 8 \times 18$ ✓.

Réponse. $u_{n+1} = 5u_n - 4(3^{n-1} + 1) = 8(5k - m)$.

Correction de l'exercice 8 – Trois entiers consécutifs

Disjonction de cas modulo 6 : tout entier est congru à $0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 modulo 6, et il suffit de calculer le produit dans chacun de ces six cas.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$n(n+1)(n+2) \equiv$	0	0	0	0	0	0

— Détail du cas $n \equiv 1$: le produit vaut $1 \times 2 \times 3 = 6 \equiv 0 \pmod 6$.
— Détail du cas $n \equiv 4$: $4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20 \equiv 0 \pmod 6$.
— Dans les six cas le reste est nul, donc 6 divise toujours le produit.

Lecture directe (à retenir).

— Parmi trois entiers consécutifs, il y a au moins un multiple de 2 et exactement un multiple de 3 : le produit est donc multiple de 2 et de 3.

— Contrôle : $n = 7$ donne $7 \times 8 \times 9 = 504 = 6 \times 84$ ✓.

Réponse. Les six cas modulo 6 donnent un reste nul : $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Correction de l'exercice 9 – Les carrés modulo 3

a) Si n n'est pas divisible par 3, il est congru à 1 ou à 2 modulo 3.

$n \equiv$	0	1	2
$n^2 \equiv$	0	1	1

— Cas $n \equiv 1$: $n^2 \equiv 1$. Cas $n \equiv 2$: $n^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$.

— Donc un carré vaut 0 ou 1 modulo 3, et 1 exactement lorsque $3 \nmid n$.

b) On raisonne sur les restes possibles de la somme :

— Si $3 \nmid x$ et $3 \nmid y$: $x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$, donc la somme n'est **pas** divisible par 3.

— Si $3 \mid x$ et $3 \nmid y$: $x^2 + y^2 \equiv 0 + 1 = 1 \pmod 3$, pas divisible non plus (idem en échangeant les rôles).

— Il ne reste qu'un cas possible : $3 \mid x$ et $3 \mid y$, et alors $x^2 + y^2 \equiv 0$.

Conclusion. $3 \mid (x^2 + y^2)$ entraîne $3 \mid x$ et $3 \mid y$.

— Contrôle : $x = 6$, $y = 9$ donne $117 = 3 \times 39$ ✓ ; $x = 4$, $y = 5$ donne 41, non divisible par 3 ✓.

Réponse. a) $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ si $3 \nmid n$ · b) sinon la somme vaut 1 ou 2 modulo 3.

Correction de l'exercice 10 – Une équation sans solution (modulo 3)

Choix du module : le terme $3y^2$ disparaît modulo 3, c'est donc le bon module.

— Si $(x\,;y)$ était solution, alors $x^2 - 3y^2 \equiv 2 \pmod 3$.

— Or $3y^2 \equiv 0 \pmod 3$, donc la relation devient $x^2 \equiv 2 \pmod 3$.

— D'après le tableau des carrés modulo 3, $x^2 \equiv 0$ ou $x^2 \equiv 1$: la valeur 2 est **impossible**.

Conclusion. L'équation $x^2 - 3y^2 = 2$ n'a aucune solution entière.

— **La méthode en une phrase** : pour prouver qu'une équation n'a pas de solution, on cherche un module dans lequel les deux membres ne peuvent pas coïncider.

— Remarque : $x^2 - 3y^2 = 1$, elle, a des solutions, par exemple $(2\,;1)$ — le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas, car 1 est un reste possible pour un carré.

Réponse. Modulo 3 il faudrait $x^2 \equiv 2$, impossible : aucune solution.

Correction de l'exercice 11 – Une somme de deux carrés

a) Un carré vaut 0 ou 1 modulo 4 ($0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 0$, $3^2 \equiv 1$). On additionne les possibilités :

$x^2 \equiv$	0	0	1	1
$y^2 \equiv$	0	1	0	1
$x^2 + y^2 \equiv$	0	1	1	2

— Une somme de deux carrés est donc congrue à 0, 1 ou 2 modulo 4 : **jamais à** 3.

b) On réduit 2 023 modulo 4 :

— $2\,023 = 4 \times 505 + 3$, donc $2\,023 \equiv 3 \pmod 4$.
— Or ce reste est impossible pour une somme de deux carrés.

Conclusion. Il n'existe pas d'entiers x et y tels que $x^2 + y^2 = 2\,023$.

— En revanche $2\,025 \equiv 1 \pmod 4$ ne se heurte pas à cet obstacle, et de fait $2\,025 = 27^2 + 36^2$.

Réponse. a) 0, 1 ou 2 · b) $2\,023 \equiv 3 \pmod 4$: impossible.

Correction de l'exercice 12 – Une somme de trois cubes

a) On teste les neuf classes modulo 9 :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 \equiv$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

— Détail : $4^3 = 64 = 9 \times 7 + 1 \equiv 1$ et $5^3 = 125 = 9 \times 13 + 8 \equiv 8 \pmod 9$.
— Un cube est donc congru à 0, 1 ou 8 modulo 9 ; autrement dit à 0, 1 ou -1.

b) Une somme de trois cubes est congrue à une somme de trois termes valant chacun 0, 1 ou -1 :

— les valeurs possibles vont de -3 à 3, soit modulo 9 : 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8.
— Les restes 4 et 5 sont donc **inaccessibles**.
— Or $2\,029 = 9 \times 225 + 4$, donc $2\,029 \equiv 4 \pmod 9$.

Conclusion. L'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 2\,029$ n'a aucune solution entière.

— Ce test modulo 9 est le premier réflexe des mathématiciens sur les sommes de cubes : il élimine d'un coup tous les entiers congrus à 4 ou 5 modulo 9.

Réponse. a) $x^3 \equiv 0$, 1 ou $8 \pmod 9$ · b) $2\,029 \equiv 4$, reste inaccessible.

Correction de l'exercice 13 – Un nombre de la forme aabb

On traduit l'écriture décimale en une **somme de puissances de 10** — c'est toujours le premier geste :

$$N = 1\,000a + 100a + 10b + b$$

— On regroupe : $N = 1\,100a + 11b$.
— On factorise par 11 : $N = 11(100a + b)$.
— Comme $100a + b$ est un entier, 11 divise N.

Conclusion. Tout nombre de la forme $\overline{aabb}$ est divisible par 11, et le quotient vaut $100a + b$.

— Contrôle : $7\,733 = 11 \times 703$ ✓ et $100 \times 7 + 3 = 703$ ✓.
— On peut aussi invoquer le **critère par somme alternée** : $a - a + b - b = 0$, multiple de 11.

Réponse. $N = 1\,100a + 11b = 11(100a + b)$.

Correction de l'exercice 14 – Le tour de magie du 9

a) On note $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ et $S = a + b + c$ la somme des chiffres.

— $N - S = 100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b$.
— On factorise : $N - S = 9(11a + b)$.

— C’est donc toujours un multiple de 9, quel que soit le nombre choisi.
— Contrôle : $N = 742$, $S = 13$, $N - S = 729 = 9 \times 81$ ✓.

b) Le résultat $R = N - S$ est un multiple de 9, donc **la somme de ses chiffres est elle aussi un multiple de** 9 (critère de divisibilité, qui vient de $10 \equiv 1 \pmod 9$).

— Le magicien additionne les chiffres annoncés, puis cherche ce qu’il faut ajouter pour atteindre le multiple de 9 immédiatement supérieur : c’est le chiffre barré.
— Exemple : $R = 729$, le spectateur barre le 2 et annonce 7 et 9, dont la somme est 16 ; le multiple de 9 suivant est 18, et $18 - 16 = 2$: c’est bien le chiffre barré.
— **Pourquoi il faut interdire de barrer un** 0 : 0 et 9 donneraient la même somme annoncée, le magicien ne pourrait pas trancher.

Réponse. a) $N - S = 9(11a + b)$ · b) le chiffre barré complète la somme des chiffres restants au multiple de 9 supérieur.

Correction de l’exercice 15 – Bilan : trois démonstrations

a) On pose $v_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ et $P(n)$: « 7 divise v_n ».

— **Initialisation** : $v_0 = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$ ✓.
— **Hérédité** : supposons $v_n = 7k$. Alors

$$v_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$

— On fait apparaître v_n en écrivant $2 = 9 - 7$:
— $v_{n+1} = 9\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) - 7 \times 2^{n+2} = 9 \times 7k - 7 \times 2^{n+2} = 7\left(9k - 2^{n+2}\right)$.
— $P(n+1)$ est vraie, donc $P(n)$ est vraie pour tout n. Contrôle : $v_2 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$ ✓.

b) Disjonction de cas modulo 6 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$n^2 + 5 \equiv$	5	0	3	2	3	0
$n(n^2 + 5) \equiv$	0	0	0	0	0	0

— Détail du cas $n \equiv 2$: $n^2 + 5 \equiv 4 + 5 = 9 \equiv 3$, puis $2 \times 3 = 6 \equiv 0 \pmod 6$.
— Détail du cas $n \equiv 4$: $16 + 5 = 21 \equiv 3$, puis $4 \times 3 = 12 \equiv 0 \pmod 6$.
— Les six restes sont nuls : 6 divise $n(n^2 + 5)$ pour tout n.

c) On note n le premier des entiers consécutifs.

— **Cinq entiers** : $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$, toujours multiple de 5 (et c’est 5 fois celui du milieu).
— **Quatre entiers** : $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$.
— $4n + 6 = 4(n+1) + 2$: le reste dans la division par 4 vaut 2, jamais 0.
— **Conclusion** : cette somme est toujours de la forme $4q + 2$, donc jamais divisible par 4. La symétrie du cas impair (cinq termes) ne se transpose pas au cas pair.

Réponse. a) $v_{n+1} = 7(9k - 2^{n+2})$ · b) les six cas modulo 6 donnent 0 · c) $5(n+2)$ et $4n + 6 \equiv 2 \pmod 4$.