

Plaquette 2 - Diviseurs, multiples et équations à diviseurs

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes pour la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

- $b \mid a$ signifie : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Tout entier divise 0 ; 1 et -1 divisent tout entier.
- Les diviseurs vont **par paires** : si $d \mid n$ avec $n > 0$, alors $\frac{n}{d}$ est aussi un diviseur de n . On les liste en remontant de 1 jusqu'à $\sqrt{n}$.
- **Transitivité** : si $c \mid b$ et $b \mid a$, alors $c \mid a$.
- **Combinaison linéaire** : si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (au + bv)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.
- **Encadrement** : si $b \mid a$ et $a \neq 0$, alors $|b| \leq |a|$. Un entier non nul n'a donc qu'un **nombre fini** de diviseurs.
- **Méthode de l'équation à diviseurs**. Pour trouver les n tels que $(n + a) \mid P(n)$, on écrit $P(n) = (n + a) \times Q(n) + r$ avec r **constant** : alors

$$(n + a) \mid P(n) \Leftrightarrow (n + a) \mid r$$

et $n + a$ parcourt la liste finie des diviseurs de r dans $\mathbb{Z}$.

- **Méthode de la factorisation**. Une équation $xy + ax + by = c$ se ramène à un produit : on ajoute ab aux deux membres pour obtenir $(x + b)(y + a) = c + ab$, puis on teste les couples de diviseurs de $c + ab$.
- On termine **toujours** par la **réciprocité** : les conditions obtenues sont nécessaires, il reste à vérifier que chaque candidat convient.

Correction de l'exercice 1 - Diviseurs d'un entier

- a) On cherche les diviseurs **par paires** en essayant les entiers de 1 jusqu'à $\sqrt{84} \approx 9,2$:
- $84 = 1 \times 84$; $84 = 2 \times 42$; $84 = 3 \times 28$; $84 = 4 \times 21$.
 - 5 ne convient pas (84 ne se termine ni par 0 ni par 5), $84 = 6 \times 14$, $84 = 7 \times 12$.
 - 8 ne convient pas ($84 = 8 \times 10 + 4$), 9 non plus (la somme des chiffres est 12, qui n'est pas multiple de 9).
 - Une fois $\sqrt{84}$ dépassé, on a déjà tout : chaque nouveau diviseur serait le partenaire d'un diviseur déjà trouvé.

La liste est donc : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84, soit **douze** diviseurs positifs.

- b) Dans $\mathbb{Z}$, si d divise 18 alors $-d$ aussi : on liste les diviseurs positifs 1, 2, 3, 6, 9, 18 puis on ajoute leurs opposés.

- 18 a donc 12 diviseurs dans $\mathbb{Z}$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.
- **Piège classique** : dans une équation à diviseurs, oublier les diviseurs négatifs fait perdre la moitié des solutions.

Réponse. a) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 · b) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

Correction de l'exercice 2 - Diviseurs communs, multiples communs

- a) On dresse les deux listes, puis on prend l'intersection :

- Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

- Diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
 - Communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12.
 - Le plus grand est 12 : on retrouve la notion de **PGCD**, et on remarque que tous les diviseurs communs divisent 12.
- b) On liste les multiples de 18 et on s'arrête au premier qui est aussi multiple de 12 :
- 18 (non, $18 = 12 + 6$), $36 = 12 \times 3$: c'est gagné.
 - Le plus petit multiple commun strictement positif est donc 36.
 - **Conclusion.** Deux engrenages de 12 et 18 dents reviennent en position initiale après 36 dents, soit 3 tours du premier et 2 tours du second.
- Réponse.** a) 1, 2, 3, 4, 6, 12 · b) 36.

Correction de l'exercice 3 - Démontrer une divisibilité

- a) On traduit l'hypothèse par une écriture, c'est toujours le premier geste :
- $7 \mid (n - 2)$ signifie $n - 2 = 7k$, donc $n = 7k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 - $n^2 + 3 = (7k + 2)^2 + 3 = 49k^2 + 28k + 4 + 3 = 49k^2 + 28k + 7$.
 - On **factorise par 7** : $n^2 + 3 = 7(7k^2 + 4k + 1)$.
 - Comme $7k^2 + 4k + 1$ est un entier, $7 \mid (n^2 + 3)$.
- b) On utilise la propriété de **combinaison linéaire** du cours :
- $$d \mid a \text{ et } d \mid b \implies d \mid (au + bv) \text{ pour tous } u, v \in \mathbb{Z}$$
- Ici $d \mid n$ et $d \mid (n + 5)$, donc d divise la différence $(n + 5) - n = 5$.
 - **Conclusion** : $d \in \{-5; -1; 1; 5\}$.
 - Cette astuce — **soustraire pour faire disparaître** n — est le moteur de toute la plaquette.
- Réponse.** a) $n^2 + 3 = 7(7k^2 + 4k + 1)$ · b) $d \mid 5$, donc $d \in \{\pm 1; \pm 5\}$.

Correction de l'exercice 4 - Première équation à diviseurs

On fait apparaître un **reste constant** en écrivant $n + 7$ à l'aide de $n + 2$:

$$n + 7 = (n + 2) + 5$$

- $n + 2$ divise toujours $n + 2$; donc $n + 2$ divise $n + 7$ **si et seulement si** $n + 2$ divise 5.
- Les diviseurs de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $-5, -1, 1, 5$ (ne pas oublier les négatifs).
- $n + 2 = -5 \Rightarrow n = -7$; $n + 2 = -1 \Rightarrow n = -3$; $n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1$; $n + 2 = 5 \Rightarrow n = 3$.

Réciproque (indispensable) : on vérifie les quatre valeurs.

- $n = -7$: -5 divise 0 ✓ (tout entier divise 0).
- $n = -3$: -1 divise 4 ✓ ; $n = -1$: 1 divise 6 ✓ ; $n = 3$: 5 divise 10 ✓.

Réponse. $n \in \{-7; -3; -1; 3\}$.

Correction de l'exercice 5 - Avec un carré au numérateur

On effectue la division de $n^2 + 3$ par $n - 1$ pour isoler un reste constant :

$$n^2 + 3 = (n - 1)(n + 1) + 4$$

- Vérification du développement : $(n - 1)(n + 1) + 4 = n^2 - 1 + 4 = n^2 + 3$ ✓.
- $n - 1$ divise le produit $(n - 1)(n + 1)$, donc $n - 1$ divise $n^2 + 3$ si et seulement si $n - 1$ divise 4.
- Diviseurs de 4 : $-4, -2, -1, 1, 2, 4$.

— $n - 1 = -4 \Rightarrow n = -3$; $-2 \Rightarrow n = -1$; $-1 \Rightarrow n = 0$; $1 \Rightarrow n = 2$; $2 \Rightarrow n = 3$; $4 \Rightarrow n = 5$.

Réciproque. $n = -3 : -4 \mid 12 \checkmark \cdot n = -1 : -2 \mid 4 \checkmark \cdot n = 0 : -1 \mid 3 \checkmark \cdot n = 2 : 1 \mid 7 \checkmark \cdot n = 3 : 2 \mid 12 \checkmark \cdot n = 5 : 4 \mid 28 \checkmark$.

Réponse. $n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$.

Correction de l'exercice 6 - Quand le coefficient n'est pas 1

Ici on ne peut pas soustraire directement : les coefficients de n diffèrent. On **combine** les deux expressions pour éliminer n .

- Si $2n + 1$ divise $3n + 7$, alors il divise $2(3n + 7) = 6n + 14$.
- Il divise aussi $3(2n + 1) = 6n + 3$.
- Par différence, il divise $(6n + 14) - (6n + 3) = 11$.
- Diviseurs de 11 : $-11, -1, 1, 11$.
- $2n + 1 = -11 \Rightarrow n = -6$; $-1 \Rightarrow n = -1$; $1 \Rightarrow n = 0$; $11 \Rightarrow n = 5$.

Réciproque obligatoire : multiplier par 2 n'est pas une équivalence, on a seulement obtenu des conditions **nécessaires**.

- $n = -6 : -11$ divise $-11 \checkmark \cdot n = -1 : -1$ divise $4 \checkmark$.
- $n = 0 : 1$ divise $7 \checkmark \cdot n = 5 : 11$ divise $22 \checkmark$.
- Les quatre valeurs conviennent.

Réponse. $n \in \{-6; -1; 0; 5\}$.

Correction de l'exercice 7 - Restriction aux entiers naturels

On isole un reste constant :

$$3n + 2 = 3(n + 5) - 13$$

- Vérification : $3n + 15 - 13 = 3n + 2 \checkmark$.
- Donc $n + 5$ divise $3n + 2$ si et seulement si $n + 5$ divise 13.
- Ici $n \in \mathbb{N}$, donc $n + 5 \geq 5$: parmi les diviseurs de 13 ($\pm 1, \pm 13$), seul 13 est possible.
- $n + 5 = 13$ donne $n = 8$.

Réciproque. Pour $n = 8 : 3n + 2 = 26 = 13 \times 2$, et $n + 5 = 13 : \checkmark$.

- **Conclusion.** Une seule valeur convient, $n = 8$.
- Toujours lire l'ensemble de départ : dans $\mathbb{Z}$, on aurait aussi obtenu $n = -4, n = -6$ et $n = -18$.

Réponse. $n = 8$.

Correction de l'exercice 8 - Un quotient d'expressions

Dire que le quotient est entier, c'est dire que $n + 3$ divise $n^2 + 1$ (avec $n \neq -3$).

$$n^2 + 1 = (n + 3)(n - 3) + 10$$

- Vérification : $(n + 3)(n - 3) + 10 = n^2 - 9 + 10 = n^2 + 1 \checkmark$.
- Donc $n + 3$ doit diviser 10.
- Diviseurs de 10 : $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10$.
- D'où $n \in \{-13; -8; -5; -4; -2; -1; 2; 7\}$.

Réciproque sur deux valeurs, pour se rassurer :

- $n = 7 : \frac{50}{10} = 5 \checkmark \cdot n = -13 : \frac{170}{-10} = -17 \checkmark$.

- Les huit valeurs conviennent, car la condition trouvée est **équivalente** à celle de départ.

Réponse. $n \in \{-13; -8; -5; -4; -2; -1; 2; 7\}$.

Correction de l'exercice 9 - Équation produit dans $\mathbb{Z}$

Un produit de **deux entiers** vaut 7 : chacun des facteurs est un diviseur de 7, et ils se déterminent l'un l'autre.

- Diviseurs de 7 : $-7, -1, 1, 7$. On dresse le tableau des quatre cas.

$x - 2$	$y + 3$	x	y
1	7	3	4
7	1	9	-2
-1	-7	1	-10
-7	-1	-5	-4

Réciproque. On contrôle chaque couple :

- $(3; 4) : 1 \times 7 = 7 \checkmark \cdot (9; -2) : 7 \times 1 = 7 \checkmark$.
- $(1; -10) : (-1) \times (-7) = 7 \checkmark \cdot (-5; -4) : (-7) \times (-1) = 7 \checkmark$.
- **Piège** : oublier les deux cas négatifs, ou croire qu'il y a huit solutions alors que le choix du premier facteur impose le second.

Réponse. $(x; y) \in \{(3; 4); (9; -2); (1; -10); (-5; -4)\}$.

Correction de l'exercice 10 - Factoriser pour se ramener à un produit

Le membre de gauche n'est pas un produit : on le **complète** pour qu'il le devienne.

- $xy + 2x + y = x(y + 2) + y$. On ajoute 2 aux deux membres :
- $x(y + 2) + y + 2 = 12$, soit $(x + 1)(y + 2) = 12$.
- Vérification du développement : $(x + 1)(y + 2) = xy + 2x + y + 2 \checkmark$.
- Comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $x + 1 \geq 1$ et $y + 2 \geq 2$.

On teste les couples de diviseurs positifs de 12 avec $y + 2 \geq 2$:

$x + 1$	$y + 2$	x	y
1	12	0	10
2	6	1	4
3	4	2	2
4	3	3	1
6	2	5	0

- Le cas $x + 1 = 12$ donnerait $y + 2 = 1$, impossible dans $\mathbb{N}$.
- Contrôle sur $(2; 2) : 4 + 4 + 2 = 10 \checkmark \cdot$ sur $(5; 0) : 0 + 10 + 0 = 10 \checkmark$.

Réponse. $(x; y) \in \{(0; 10); (1; 4); (2; 2); (3; 1); (5; 0)\}$.

Correction de l'exercice 11 - Diviseurs communs de deux expressions

a) On cherche une **combinaison linéaire** des deux expressions qui élimine n :

- d divise $3n + 4$, donc d divise $4(3n + 4) = 12n + 16$.
- d divise $4n + 5$, donc d divise $3(4n + 5) = 12n + 15$.

— Par différence : d divise $(12n + 16) - (12n + 15) = 1$.

b) Un diviseur de 1 vaut 1 ou -1 .

— Les seuls diviseurs communs de $3n + 4$ et $4n + 5$ sont donc 1 et -1 : ces deux nombres sont **premiers entre eux**, et cela pour **toute** valeur de n .

— Exemple de contrôle avec $n = 7$: $3n + 4 = 25$ et $4n + 5 = 33$; leurs diviseurs communs se réduisent bien à 1.

Réponse. a) $d \mid 4(3n + 4) - 3(4n + 5) = 1$ · b) $3n + 4$ et $4n + 5$ sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 12 - Un produit d'entiers consécutifs

a) n impair s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$.

— On factorise : $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

b) Il reste à gagner un facteur 2 dans $k(k + 1)$:

— k et $k + 1$ sont deux entiers **consécutifs**, donc l'un des deux est pair : $k(k + 1) = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

— Ainsi $n^2 - 1 = 4 \times 2m = 8m$: $n^2 - 1$ est bien divisible par 8.

— **Contrôle** : $n = 7$ donne $48 = 8 \times 6$ ✓ ; $n = 11$ donne $120 = 8 \times 15$ ✓.

— **Le réflexe à retenir** : le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair, celui de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Réponse. $n^2 - 1 = 4k(k + 1) = 8m$: divisible par 8.

Correction de l'exercice 13 - Conditionnement en boîtes

« Des cartons identiques et complets » signifie que le nombre de pots par carton **divise** 156.

— Diviseurs de 156 : on décompose $156 = 4 \times 39 = 2^2 \times 3 \times 13$.

— Liste complète : 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156.

— On garde ceux qui vérifient $5 < d < 20$: 6, 12 et 13.

Pots par carton	Nombre de cartons
6	$156 \div 6 = 26$
12	$156 \div 12 = 13$
13	$156 \div 13 = 12$

Conclusion. Trois conditionnements conviennent : 26 cartons de 6 pots, 13 cartons de 12 pots ou 12 cartons de 13 pots.

Réponse. 6 pots (26 cartons), 12 pots (13 cartons) ou 13 pots (12 cartons).

Correction de l'exercice 14 - Un rectangle d'aire imposée

a) Les dimensions ℓ et L vérifient $\ell \times L = 120$: ce sont des couples de diviseurs de 120.

— Diviseurs de 120 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

— Avec $\ell \leq L$, on les apparie : (1 ; 120), (2 ; 60), (3 ; 40), (4 ; 30), (5 ; 24), (6 ; 20), (8 ; 15), (10 ; 12).

— Il y a donc **huit** massifs possibles.

b) La clôture est le **périmètre** $P = 2(\ell + L)$:

Dimensions	$\ell + L$	Périmètre
(6 ; 20)	26	52 m
(8 ; 15)	23	46 m
(10 ; 12)	22	44 m

- Les cinq premiers couples donnent des périmètres encore plus grands (242, 124, 86, 68, 58 m).
- **Conclusion.** Seuls 8×15 (46 m) et 10×12 (44 m) tiennent sous 50 m : à aire fixée, le périmètre est d'autant plus petit que le rectangle est proche d'un carré.

Réponse. a) (1 ; 120), (2 ; 60), (3 ; 40), (4 ; 30), (5 ; 24), (6 ; 20), (8 ; 15), (10 ; 12) · b) 8×15 et 10×12 .

Correction de l'exercice 15 - Bilan : trois questions de divisibilité

a) On fait apparaître un reste constant :

$$n^2 + n + 7 = n(n + 1) + 7$$

- $n + 1$ divise $n(n + 1)$, donc la condition équivaut à : $n + 1$ divise 7.
- $n \in \mathbb{N}$ donne $n + 1 \geq 1$, donc $n + 1 = 1$ ou $n + 1 = 7$, c'est-à-dire $n = 0$ ou $n = 6$.
- Réciproque : $n = 0$ donne $1 \mid 7 \checkmark$; $n = 6$ donne $7 \mid 49 \checkmark$.

b) On factorise en complétant :

- $xy - 3x + y = x(y - 3) + y$. On ajoute -3 aux deux membres : $x(y - 3) + y - 3 = 2$, soit $(x + 1)(y - 3) = 2$.
- Diviseurs de 2 : $-2, -1, 1, 2$.

$x + 1$	$y - 3$	$(x ; y)$
1	2	(0 ; 5)
2	1	(1 ; 4)
-1	-2	(-2 ; 1)
-2	-1	(-3 ; 2)

- Contrôle sur $(-3 ; 2)$: $-6 + 9 + 2 = 5 \checkmark$.

c) La longueur n d'un tour divise 2 024, avec $30 < n < 60$.

- $2\,024 = 8 \times 253 = 2^3 \times 11 \times 23$.
- Diviseurs : 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024.
- Entre 30 et 60 : 44 et 46.
- **Conclusion.** Le circuit mesure 44 km (46 tours) ou 46 km (44 tours).

Réponse. a) $n \in \{0 ; 6\}$ · b) (0 ; 5), (1 ; 4), (-2 ; 1), (-3 ; 2) · c) 44 km ou 46 km.