Plaquette 4 – Démontrer : disjonction de cas, récurrence et non-existence

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Trois outils de démonstration, à choisir selon la question : la **disjonction de cas** modulo n (un tableau qui traite tous les entiers d'un coup), le **raisonnement par récurrence** pour une divisibilité dépendant de n, et l'argument de **non-existence** — montrer qu'une équation n'a aucune solution entière en la regardant modulo un entier bien choisi.

Exercice 1 – Parité d'une expression

Montrer que pour tout entier relatif n, le nombre $n^2 + n$ est pair.

Exercice 2 – Deux méthodes pour une divisibilité

Soit n un entier naturel. Montrer que $4^n + 5$ est divisible par 3 :

a) par les congruences ;

b) par récurrence.

Exercice 3 – Une différence de puissances

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $11^n - 4^n$ est divisible par 7.

Exercice 4 – Une condition sur la parité de l'exposant

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $2^n + 1$ est divisible par 3.

Exercice 5 – Récurrence : divisibilité par 8

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

Exercice 6 – Récurrence : divisibilité par 6

Démontrer par récurrence que $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout entier naturel n.

Exercice 7 – Récurrence avec deux puissances

Soit $u_n = 5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$.

Démontrer que u_n est divisible par 8 pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8 – Trois entiers consécutifs

Montrer que pour tout entier relatif n, le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Les carrés modulo 3

a) Montrer que si n n'est pas divisible par 3, alors $n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

b) En déduire que si 3 divise $x^2 + y^2$, alors 3 divise x **et** 3 divise y.

Exercice 10 – Une équation sans solution (modulo 3)

Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 11 – Une somme de deux carrés

a) Donner les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 4.

b) En déduire que 2 023 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 12 – Une somme de trois cubes

a) Dresser le tableau des restes de x^3 modulo 9.

b) En déduire que l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 2\,029$ n'a pas de solution entière.

Exercice 13 – Un nombre de la forme aabb

Soit N un entier dont l'écriture décimale est $\overline{aabb}$, où a et b sont des chiffres et $a \neq 0$ (par exemple 7 733).

Montrer que N est toujours divisible par 11.

Exercice 14 – Le tour de magie du 9

On demande à un spectateur de choisir un nombre de trois chiffres, puis de lui **soustraire la somme de ses chiffres**.

a) Montrer que le résultat est toujours divisible par 9.

b) Le magicien demande ensuite de barrer un chiffre non nul du résultat et d'annoncer les autres. Expliquer comment il retrouve le chiffre barré.

Exercice 15 – Bilan : trois démonstrations

a) Démontrer par récurrence que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6 pour tout entier relatif n.

c) Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 5, mais que la somme de quatre entiers consécutifs n'est **jamais** divisible par 4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).