

Plaquette 4 - Démontrer : disjonction de cas, récurrence et non-existence

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Trois outils de démonstration, à choisir selon la question : la **disjonction de cas** modulo n (un tableau qui traite tous les entiers d'un coup), le **raisonnement par récurrence** pour une divisibilité dépendant de n , et l'argument de **non-existence** — montrer qu'une équation n'a aucune solution entière en la regardant modulo un entier bien choisi.

Exercice 1 - Parité d'une expression

Montrer que pour tout entier relatif n , le nombre $n^2 + n$ est pair.

Exercice 2 - Deux méthodes pour une divisibilité

Soit n un entier naturel. Montrer que $4^n + 5$ est divisible par 3 :

- a) par les congruences ;
- b) par récurrence.

Exercice 3 - Une différence de puissances

Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $11^n - 4^n$ est divisible par 7.

Exercice 4 - Une condition sur la parité de l'exposant

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $2^n + 1$ est divisible par 3.

Exercice 5 - Récurrence : divisibilité par 8

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

Exercice 6 - Récurrence : divisibilité par 6

Démontrer par récurrence que $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout entier naturel n .

Exercice 7 - Récurrence avec deux puissances

Soit $u_n = 5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$.

Démontrer que u_n est divisible par 8 pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8 - Trois entiers consécutifs

Montrer que pour tout entier relatif n , le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Exercice 9 - Les carrés modulo 3

- a) Montrer que si n n'est pas divisible par 3, alors $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.
- b) En déduire que si 3 divise $x^2 + y^2$, alors 3 divise x **et** 3 divise y .

Exercice 10 - Une équation sans solution (modulo 3)

Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 11 - Une somme de deux carrés

- a) Donner les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 4.
- b) En déduire que 2 023 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 12 - Une somme de trois cubes

- a) Dresser le tableau des restes de x^3 modulo 9.
- b) En déduire que l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 2\,029$ n'a pas de solution entière.

Exercice 13 - Un nombre de la forme aabb

Soit N un entier dont l'écriture décimale est $\overline{aabb}$, où a et b sont des chiffres et $a \neq 0$ (par exemple 7 733).

Montrer que N est toujours divisible par 11.

Exercice 14 - Le tour de magie du 9

On demande à un spectateur de choisir un nombre de trois chiffres, puis de lui **soustraire la somme de ses chiffres**.

- a) Montrer que le résultat est toujours divisible par 9.
- b) Le magicien demande ensuite de barrer un chiffre non nul du résultat et d'annoncer les autres. Expliquer comment il retrouve le chiffre barré.

Exercice 15 - Bilan : trois démonstrations

- a) Démontrer par récurrence que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6 pour tout entier relatif n .
- c) Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 5, mais que la somme de quatre entiers consécutifs n'est **jamaïs** divisible par 4.