

Plaquette 2 - Diviseurs, multiples et équations à diviseurs

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On dresse l'ensemble des **diviseurs** d'un entier, on démontre des divisibilités par **combinaison linéaire**, et on résout des **équations à diviseurs** : trouver tous les entiers n tels qu'une expression en divise une autre, ou résoudre une équation du type $(x - a)(y - b) = k$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1 - Diviseurs d'un entier

- a) Dresser la liste de tous les diviseurs **positifs** de 84.
- b) Dresser la liste de tous les diviseurs de 18 **dans** $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 - Diviseurs communs, multiples communs

- a) Déterminer tous les diviseurs positifs communs à 36 et 60.
- b) Déterminer le plus petit multiple strictement positif commun à 12 et 18.

Exercice 3 - Démontrer une divisibilité

Soit n un entier relatif.

- a) Montrer que si $7 \mid (n - 2)$, alors $7 \mid (n^2 + 3)$.
- b) Montrer que si d divise n et d divise $n + 5$, alors d divise 5.

Exercice 4 - Première équation à diviseurs

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(n + 7)$.

Exercice 5 - Avec un carré au numérateur

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n - 1)$ divise $(n^2 + 3)$.

Exercice 6 - Quand le coefficient n'est pas 1

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(2n + 1)$ divise $(3n + 7)$.

Exercice 7 - Restriction aux entiers naturels

Déterminer tous les entiers **naturels** n tels que $(n + 5)$ divise $(3n + 2)$.

Exercice 8 - Un quotient d'expressions

Déterminer tous les entiers relatifs n pour lesquels $\frac{n^2 + 1}{n + 3}$ est un entier.

Exercice 9 - Équation produit dans $\mathbb{Z}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(x - 2)(y + 3) = 7$.

Exercice 10 - Factoriser pour se ramener à un produit

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $xy + 2x + y = 10$.

Exercice 11 - Diviseurs communs de deux expressions

Soit n un entier relatif et d un diviseur commun de $3n + 4$ et de $4n + 5$.

- Montrer que d divise 1.
- Qu'en déduit-on pour les deux nombres $3n + 4$ et $4n + 5$?

Exercice 12 - Un produit d'entiers consécutifs

Soit n un entier impair.

- Écrire n sous la forme $2k + 1$ puis développer $n^2 - 1$.
- En déduire que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 13 - Conditionnement en boîtes

Une conserverie doit répartir 156 pots de confiture dans des cartons **tous identiques et complets**.

Chaque carton doit contenir **plus de** 5 pots et **moins de** 20. Quels conditionnements sont possibles, et combien de cartons pour chacun ?

Exercice 14 - Un rectangle d'aire imposée

Un massif rectangulaire a une aire de 120 m^2 et des dimensions **entières** en mètres.

- Donner toutes les dimensions possibles (largeur $\leq$ longueur).
- On veut de plus une clôture de moins de 50 m de long. Quelles dimensions restent possibles ?

Exercice 15 - Bilan : trois questions de divisibilité

- Déterminer tous les entiers naturels n tels que $(n + 1)$ divise $(n^2 + n + 7)$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy - 3x + y = 5$.
- Un cycliste parcourt un circuit de n km, n entier. En 2 024 il a bouclé exactement un nombre entier de tours pour un total de 2 024 km, et un tour mesure entre 30 et 60 km. Quelles sont les longueurs possibles du circuit ?