

## Plaquette 1 - Division euclidienne, congruences et critères

### Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

#### Exercices

#### Méthode

On manipule la divisibilité et la **division euclidienne**, on calcule avec les **congruences** (somme, produit, puissance), on détermine des restes de grandes puissances, et on démontre des critères de divisibilité ou des propriétés de suites d'entiers.

#### Exercice 1 - Divisibilité et combinaison linéaire

Soit  $n$  un entier tel que  $7 \mid n$ .

- a) Montrer que  $7 \mid (3n + 14)$ .
- b) Soit  $a$  et  $b$  deux entiers divisibles par 5. Montrer que  $5 \mid (4a - 3b)$ .

#### Exercice 2 - Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de :

- a) 2 026 par 7
- b)  $-47$  par 5

#### Exercice 3 - Congruences élémentaires

Déterminer le reste de la division par 9 de :

- a) 47
- b) 100
- c)  $-13$

#### Exercice 4 - Opérations sur les congruences

On sait que  $a \equiv 3 \pmod{7}$  et  $b \equiv 5 \pmod{7}$ . Déterminer, modulo 7 :

- a)  $a + b$
- b)  $ab$
- c)  $a^2 + b^2$

#### Exercice 5 - Reste d'une puissance

Déterminer le reste de la division de  $3^{100}$  par 7.

#### Exercice 6 - Chiffre des unités

Déterminer le chiffre des unités de  $7^{2026}$ .

**Exercice 7 - Critère de divisibilité par 9**

- a) Justifier que  $10 \equiv 1 \pmod{9}$ , puis que  $10^k \equiv 1 \pmod{9}$  pour tout entier  $k \geq 0$ .
- b) En déduire le critère de divisibilité par 9.
- c) Le nombre 47 835 est-il divisible par 9 ?

**Exercice 8 - Critère de divisibilité par 11**

- a) Justifier que  $10 \equiv -1 \pmod{11}$ .
- b) En déduire un critère de divisibilité par 11.
- c) Le nombre 8 591 est-il divisible par 11 ?

**Exercice 9 - Discussion selon le reste**

Soit  $n$  un entier. Déterminer les restes possibles de  $n^2$  modulo 4.

**Exercice 10 - Démontrer une divisibilité**

Montrer que pour tout entier  $n$ , le nombre  $n(n+1)$  est divisible par 2, puis que  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 6.

**Exercice 11 - Résoudre une congruence**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $3x \equiv 2 \pmod{5}$ .

**Exercice 12 - Application : jour de la semaine**

Aujourd'hui est un lundi. Quel jour sera-t-il dans 1 000 jours ?

**Exercice 13 - Synthèse : suite et congruences**

Soit  $u_n = 4^n + 5$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3$  et leurs restes modulo 3.
- b) Démontrer que  $3 \mid u_n$  pour tout  $n$ .