Plaquette 1 – Division euclidienne, congruences et critères

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On manipule la divisibilité et la **division euclidienne**, on calcule avec les **congruences** (somme, produit, puissance), on détermine des restes de grandes puissances, et on démontre des critères de divisibilité ou des propriétés de suites d'entiers.

Exercice 1 – Divisibilité et combinaison linéaire

Soit n un entier tel que $7 \mid n$.

a) Montrer que $7 \mid (3n + 14)$.

b) Soit a et b deux entiers divisibles par 5. Montrer que $5 \mid (4a - 3b)$.

Exercice 2 – Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de :

a) 2 026 par 7

b) -47 par 5

Exercice 3 – Congruences élémentaires

Déterminer le reste de la division par 9 de :

a) 47

b) 100

c) -13

Exercice 4 – Opérations sur les congruences

On sait que $a \equiv 3 \pmod 7$ et $b \equiv 5 \pmod 7$. Déterminer, modulo 7 :

a) $a + b$

b) ab

c) $a^2 + b^2$

Exercice 5 – Reste d'une puissance

Déterminer le reste de la division de 3^{100} par 7.

Exercice 6 – Chiffre des unités

Déterminer le chiffre des unités de 7^{2026}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Critère de divisibilité par 9

a) Justifier que $10 \equiv 1 \pmod 9$, puis que $10^k \equiv 1 \pmod 9$ pour tout entier $k \geq 0$.
b) En déduire le critère de divisibilité par 9.
c) Le nombre 47 835 est-il divisible par 9 ?

Exercice 8 – Critère de divisibilité par 11

a) Justifier que $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
b) En déduire un critère de divisibilité par 11.
c) Le nombre 8 591 est-il divisible par 11 ?

Exercice 9 – Discussion selon le reste

Soit n un entier. Déterminer les restes possibles de n^2 modulo 4.

Exercice 10 – Démontrer une divisibilité

Montrer que pour tout entier n, le nombre $n(n+1)$ est divisible par 2, puis que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Exercice 11 – Résoudre une congruence

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x \equiv 2 \pmod 5$.

Exercice 12 – Application : jour de la semaine

Aujourd'hui est un lundi. Quel jour sera-t-il dans 1 000 jours ?

Exercice 13 – Divisibilité de n³ − n par 3

Montrer que, pour tout entier n, l'entier $n^3 - n$ est divisible par 3. On raisonnera sur les restes possibles de n dans la division par 3.

Exercice 14 – Chiffre des unités d'un carré

a) Quels sont les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier ?
b) En déduire que 2 027 et 13 578 ne sont pas des carrés d'entiers.

Exercice 15 – Synthèse : suite et congruences

Soit $u_n = 4^n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et leurs restes modulo 3.
b) Démontrer que $3 \mid u_n$ pour tout n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).