

Plaquette 5 - Synthèse : grandes puissances, clés de contrôle et chiffrement
Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes
Exercices

Méthode

La plaquelette de synthèse : on calcule le reste de **très grandes puissances** grâce aux cycles, puis on met les congruences au travail dans les applications qui les ont rendues indispensables — la **preuve par neuf**, les **clés de contrôle** (ISBN, code-barres, numéro de sécurité sociale) et le **chiffrement** (César et affine).

Exercice 1 - Le cycle des puissances de 2

- a) Calculer les restes de $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ modulo 7 et repérer le cycle.
- b) En déduire le reste de 2^{2026} dans la division par 7.

Exercice 2 - Un exposant gigantesque

Déterminer le reste de la division de $2\,026^{2026}$ par 9.

Exercice 3 - Les deux derniers chiffres

Déterminer les **deux derniers chiffres** de l'écriture décimale de 7^{2026} .

Exercice 4 - Longueur d'un cycle

- a) Déterminer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $3^p \equiv 1 \pmod{7}$.
- b) En déduire le reste de 3^{100} modulo 7.

Exercice 5 - Une somme de deux puissances

Déterminer le reste de $2^{2026} + 3^{2026}$ dans la division par 5.

Exercice 6 - La preuve par neuf

Un élève pose la multiplication $3\,847 \times 259$ et trouve 996 273.

- a) Utiliser la preuve par neuf pour montrer que ce résultat est faux.
- b) Le vrai résultat est 996 373. Vérifier qu'il passe la preuve par neuf.
- c) Un autre élève annonce 996 337. Que dit la preuve par neuf ? Conclure sur les limites de la méthode.

Exercice 7 - Calculer une clé ISBN

Un livre porte l'ISBN 2-7104-3765- k , dont la clé k est effacée.

Sachant que les dix chiffres $d_1, \dots, d_{10}$ d'un ISBN vérifient $\sum_{i=1}^{10} i \times d_i \equiv 0 \pmod{11}$, déterminer k .

Exercice 8 - Retrouver un chiffre illisible

Sur la couverture abîmée d'un livre, on lit l'ISBN 2-710x-3765-1 : le cinquième chiffre x est illisible.

Retrouver x à l'aide de la clé.

Exercice 9 - La clé d'un code-barres

La clé d'un code-barres EAN-13 se calcule ainsi : on multiplie les douze premiers chiffres alternativement par 1 et par 3 (en commençant par 1), on additionne, et la clé est ce qu'il faut ajouter pour atteindre un multiple de 10.

Déterminer la clé du code 301 234 567 890.

Exercice 10 - La clé d'un numéro de sécurité sociale

La clé d'un numéro de sécurité sociale à 13 chiffres N est donnée par $\text{clé} = 97 - r$, où r est le reste de N dans la division par 97.

Calculer la clé du numéro $N = 1\ 85\ 06\ 75\ 114\ 287$.

Exercice 11 - Le chiffre de César

On code les lettres par $A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$, et l'on chiffre par $y \equiv x + 3 \pmod{26}$.

- Coder le mot MATHS.
- Déchiffrer le message FDOFXO.

Exercice 12 - Le chiffrement affine

On chiffre maintenant par $y \equiv 5x + 8 \pmod{26}$.

- Coder le mot CLE.
- Vérifier que 21 est l'inverse de 5 modulo 26, puis donner la formule de déchiffrement.
- Déchiffrer VAQNPC.

Exercice 13 - Une clé qui ne convient pas

Montrer que le chiffrement $y \equiv 13x + 4 \pmod{26}$ est **inutilisable** : deux lettres différentes peuvent être codées par la même lettre.

Exercice 14 - Horloge et passages d'un satellite

- Il est 9 h. Quelle heure sera-t-il dans 1 009 heures ?
- Un satellite survole une station tous les 11 jours. Il l'a survolée un **mardi**. Quel jour de la semaine aura lieu le 100^e passage suivant ?

Exercice 15 - Bilan : trois applications

- Déterminer le reste de 7^{2026} dans la division par 13.

b) Un code-barres EAN-13 se lit 4 012 345 67y 891 : le dixième chiffre y est effacé. Le retrouver.

c) Un message chiffré par $y \equiv 3x + 5 \pmod{26}$ arrive sous la forme HVPPR. Déchiffrer ce message, après avoir vérifié que 9 est l'inverse de 3 modulo 26.