Plaquette 5 – Synthèse : grandes puissances, clés de contrôle et chiffrement

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse : on calcule le reste de **très grandes puissances** grâce aux cycles, puis on met les congruences au travail dans les applications qui les ont rendues indispensables — la **preuve par neuf**, les **clés de contrôle** (ISBN, code-barres, numéro de sécurité sociale) et le **chiffrement** (César et affine).

Exercice 1 – Le cycle des puissances de 2

a) Calculer les restes de 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 modulo 7 et repérer le cycle.

b) En déduire le reste de 2^{2026} dans la division par 7.

Exercice 2 – Un exposant gigantesque

Déterminer le reste de la division de $2\,026^{2026}$ par 9.

Exercice 3 – Les deux derniers chiffres

Déterminer les **deux derniers chiffres** de l'écriture décimale de 7^{2026}.

Exercice 4 – Longueur d'un cycle

a) Déterminer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $3^p \equiv 1 \pmod 7$.

b) En déduire le reste de 3^{100} modulo 7.

Exercice 5 – Une somme de deux puissances

Déterminer le reste de $2^{2026} + 3^{2026}$ dans la division par 5.

Exercice 6 – La preuve par neuf

Un élève pose la multiplication $3\,847 \times 259$ et trouve 996 273.

a) Utiliser la preuve par neuf pour montrer que ce résultat est faux.

b) Le vrai résultat est 996 373. Vérifier qu'il passe la preuve par neuf.

c) Un autre élève annonce 996 337. Que dit la preuve par neuf ? Conclure sur les limites de la méthode.

Exercice 7 – Calculer une clé ISBN

Un livre porte l'ISBN 2-7104-3765-k, dont la clé k est effacée.

Sachant que les dix chiffres $d_1, \ldots, d_{10}$ d'un ISBN vérifient $\sum_{i=1}^{10} i \times d_i \equiv 0 \pmod{11}$, déterminer k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Retrouver un chiffre illisible

Sur la couverture abîmée d'un livre, on lit l'ISBN 2-710x-3765-1 : le cinquième chiffre x est illisible.

Retrouver x à l'aide de la clé.

Exercice 9 – La clé d'un code-barres

La clé d'un code-barres EAN-13 se calcule ainsi : on multiplie les douze premiers chiffres alternativement par 1 et par 3 (en commençant par 1), on additionne, et la clé est ce qu'il faut ajouter pour atteindre un multiple de 10.

Déterminer la clé du code 301 234 567 890.

Exercice 10 – La clé d'un numéro de sécurité sociale

La clé d'un numéro de sécurité sociale à 13 chiffres N est donnée par clé $= 97 - r$, où r est le reste de N dans la division par 97.

Calculer la clé du numéro $N = 1\,85\,06\,75\,114\,287$.

Exercice 11 – Le chiffre de César

On code les lettres par $A = 0$, $B = 1$, …, $Z = 25$, et l'on chiffre par $y \equiv x + 3 \pmod{26}$.

a) Coder le mot MATHS.

b) Déchiffrer le message FDOFXO.

Exercice 12 – Le chiffrement affine

On chiffre maintenant par $y \equiv 5x + 8 \pmod{26}$.

a) Coder le mot CLE.

b) Vérifier que 21 est l'inverse de 5 modulo 26, puis donner la formule de déchiffrement.

c) Déchiffrer VAQNPC.

Exercice 13 – Une clé qui ne convient pas

Montrer que le chiffrement $y \equiv 13x + 4 \pmod{26}$ est **inutilisable** : deux lettres différentes peuvent être codées par la même lettre.

Exercice 14 – Horloge et passages d'un satellite

a) Il est 9 h. Quelle heure sera-t-il dans 1 009 heures ?

b) Un satellite survole une station tous les 11 jours. Il l'a survolée un **mardi**. Quel jour de la semaine aura lieu le 100^{e} passage suivant ?

Exercice 15 – Bilan : trois applications

a) Déterminer le reste de 7^{2026} dans la division par 13.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Un code-barres EAN-13 se lit $4\,012\,345\,67y\,891$: le dixième chiffre y est effacé. Le retrouver.

c) Un message chiffré par $y \equiv 3x + 5 \pmod{26}$ arrive sous la forme HVPPR. Déchiffrer ce message, après avoir vérifié que 9 est l'inverse de 3 modulo 26.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).