Plaquette 3 – Calculer avec les congruences : tables modulo n et équations

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On apprend à **calculer dans les classes** : réduire un grand nombre modulo n, dresser une table d'addition ou de multiplication, résoudre une **équation de congruence** $ax \equiv b \pmod{n}$, reconnaître celles qui n'ont **aucune** solution, et traiter un **système** de deux congruences.

Exercice 1 – Tables modulo 5

a) Dresser la table d'addition modulo 5 (lignes et colonnes indexées par $0, 1, 2, 3, 4$).

b) Dresser la table de multiplication modulo 5.

c) Quels sont les entiers a de $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ qui possèdent un **inverse** modulo 5 ?

Exercice 2 – Réduire modulo 7

Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de :

a) $2\,026$

b) $1\,000$

c) -45

Exercice 3 – Réduire avant de calculer

Déterminer, sans poser la multiplication, le reste de la division de $47 \times 53 + 29$ par 9.

Exercice 4 – Une première équation de congruence

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 4 \pmod{7}$.

Exercice 5 – Passer par l'inverse

a) Vérifier que 7 est son propre inverse modulo 12.

b) En déduire la résolution de $7x \equiv 5 \pmod{12}$.

Exercice 6 – Quand on ne peut pas simplifier

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x \equiv 6 \pmod{10}$.

Expliquer pourquoi on ne peut pas « diviser par 2 » en gardant le module 10.

Exercice 7 – Une équation sans solution

Montrer que l'équation $4x \equiv 3 \pmod{6}$ n'a **aucune** solution entière.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Les restes possibles d'un carré

a) Dresser le tableau des restes de x^2 modulo 8.

b) En déduire que $x^2 + 5$ n'est jamais divisible par 8.

Exercice 9 – Une équation du second degré modulo 12

Résoudre $x^2 \equiv 4 \pmod{12}$.

Combien y a-t-il de classes solutions ? Comparer avec le nombre de solutions de $x^2 = 4$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – Équation affine

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x + 3 \equiv 1 \pmod{11}$.

Exercice 11 – Jamais divisible par 5

Montrer que pour tout entier n, le nombre $n^2 + n + 1$ n'est jamais divisible par 5.

Exercice 12 – Système de deux congruences

Déterminer tous les entiers x tels que

$$x \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{et} \quad x \equiv 2 \pmod{5}$$

Exercice 13 – Des modules qui ont un diviseur commun

Déterminer tous les entiers x tels que

$$x \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{et} \quad x \equiv 5 \pmod{6}$$

Exercice 14 – Le sac de billes

Un sac contient entre 200 et 300 billes.

Rangées par paquets de 7, il en reste 3 ; rangées par paquets de 5, il en reste 1.

Quels sont les nombres de billes possibles ?

Exercice 15 – Bilan : trois calculs modulaires

a) Résoudre $9x \equiv 6 \pmod{15}$.

b) Déterminer les restes possibles de $n^2 + 3n$ modulo 7 ; en déduire que $n^2 + 3n - 1$ n'est jamais divisible par 7.

c) Un couvreur pose des tuiles. Alignées par 7, il en reste 5 ; alignées par 9, il en reste 3. Sachant qu'il y en a entre 100 et 200, combien en a-t-il ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).