

Plaquette 3 - Degré 3 : racine évidente, identification et factorisation complète

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème de la racine. Si α est racine d'un polynôme P de degré n , alors $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ où Q est de degré $n - 1$.

Méthode d'identification, en degré 3. On écrit

$$az^3 + bz^2 + cz + d = (z - \alpha)(\alpha_2 z^2 + \beta z + \gamma)$$

puis on identifie dans l'ordre le plus rapide :

- le terme en z^3 donne $\alpha_2 = a$;
- le terme constant donne $-\alpha\gamma = d$;
- le terme en z^2 donne β ;
- le terme en z **sert de vérification**, il n'apporte rien de nouveau.

Quand la racine est une fraction $\frac{p}{q}$, on factorise plutôt par $(qz - p)$: les coefficients restent entiers.

Racines conjuguées. Si P est à coefficients **réels** et si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi. On peut alors factoriser directement par le trinôme réel

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)z + |z_0|^2$$

Relations coefficients-racines en degré 3. Si z_1, z_2, z_3 sont les racines de $az^3 + bz^2 + cz + d$:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a} \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{c}{a} \quad z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}$$

Racine multiple. α est racine **au moins double** de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité. C'est ce qui garantit qu'on trouvera toujours toutes les solutions.

Correction de l'exercice 1 - Les racines cubiques de l'unité par factorisation

- **Mise sous forme polynomiale** : $z^3 - 1 = 0$ ✓
- **Racine évidente** : $1^3 - 1 = 0$, donc 1 est racine ✓
- **Factorisation** : $z^3 - 1 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme en z^3** : $a = 1$ ✓
- **Terme constant** : $-c = -1$, donc $c = 1$ ✓
- **Terme en z^2** : dans le développement, il vaut $b - a$ ✓
- **Or P n'a pas de terme en z^2** : $b - 1 = 0$, donc $b = 1$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : il vaut $c - b = 1 - 1 = 0$ ✓
- **Cohérence** : P n'a effectivement pas de terme en z ✓
- **Factorisation obtenue** :

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

- **Identité à retenir** : c'est $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ✓
- **Second facteur** : $z^2 + z + 1 = 0$, de discriminant $1 - 4 = -3$ ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{3}$ ✓
- **Solutions** : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\langle 1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

- **Contrôle par la somme** : $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓
- **Cohérence** : le coefficient de z^2 est nul ✓
- **Contrôle par le produit** : $1 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 1$ ✓
- **Cohérence** : le produit vaut $-\frac{d}{a} = 1$ ✓

Réponse. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ et $S = \left\langle 1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 2 - Une somme de cubes

- **Racine évidente** : $(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$ ✓
- **Donc** : -2 est racine, et $z + 2$ est facteur ✓
- **Identité utile** : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ✓
- **Ici** : $a = z$ et $b = 2$ ✓
- **Factorisation** :

$$z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$$

- **Vérification par développement** : $z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓
- **Réduction** : $z^3 + 8$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Second facteur** : $z^2 - 2z + 4 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $4 - 16 = -12$ ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ✓
- **Solutions** : $\frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \langle -2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3} \rangle$$

- **Contrôle des modules** : $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ ✓
- **Cohérence** : les trois racines ont le même module 2, comme attendu pour $z^3 = -8$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $-2 + 1 + 1 = 0$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $-2 \times 4 = -8$ ✓
- **Cohérence** : le produit vaut $-\frac{d}{a} = -8$ ✓

Réponse. $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$ et $S = \langle -2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3} \rangle$.

Correction de l'exercice 3 - Chercher la racine évidente

- **Où chercher** : si P a une racine entière, elle **divise le terme constant** -12 ✓
- **Candidats** : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ ✓
- **Essai de 1** : $1 - 3 + 4 - 12 = -10 \neq 0$ ✓
- **Essai de 2** : $8 - 12 + 8 - 12 = -8 \neq 0$ ✓
- **Essai de 3** : $27 - 27 + 12 - 12 = 0$ ✓
- **Racine trouvée** : 3 ✓
- **Factorisation** : $P(z) = (z - 3)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme en z^3** : coefficient 1 ✓
- **Terme constant** : $-3c = -12$, donc $c = 4$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - 3 = -3$, donc $b = 0$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - 3b = 4 - 0 = 4$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien le coefficient de z dans P ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$$

- **Second facteur nul** : $z^2 = -4$ ✓
 - **Solutions** : $z = 2i$ ou $z = -2i$ ✓
 - **Ensemble des solutions** :
- $$S = \{3; 2i; -2i\}$$
- **Contrôle par la somme** : $3 + 2i - 2i = 3$, et $-\frac{b}{a} = 3$ ✓
 - **Contrôle par le produit** : $3 \times 4 = 12$, et $-\frac{d}{a} = 12$ ✓
 - **Remarque** : les deux racines non réelles sont conjuguées, conformément aux coefficients réels ✓

Réponse. 3 est racine, $P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$ et $S = \{3; 2i; -2i\}$.

Correction de l'exercice 4 - Une racine fractionnaire

- **Candidats** : p doit diviser le terme constant 5 ✓
- **Valeurs à tester** : $\pm \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{5}{2}$ ✓
- **Essai de $-\frac{1}{2}$** : $2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}$ ✓
- **Deuxième terme** : $-3 \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ ✓
- **Troisième et quatrième** : $8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = -4 + 5 = 1$ ✓
- **Somme** : $-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0$ ✓
- **Racine trouvée** : $-\frac{1}{2}$ ✓
- **Choix du facteur** : on factorise par $2z + 1$ plutôt que $z + \frac{1}{2}$ ✓
- **Avantage** : les coefficients restent entiers ✓
- **Forme cherchée** : $(2z + 1)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $c = 5$ ✓
- **Terme en z^2** : $2b + 1 = -3$, donc $b = -2$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $2c + b = 10 - 2 = 8$ ✓

— **Cohérence** : conforme ✓

— **Factorisation** :

$$2z^3 - 3z^2 + 8z + 5 = (2z + 1)(z^2 - 2z + 5)$$

— **Second facteur** : discriminant $4 - 20 = -16$ ✓

— **Solutions** : $\frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\langle -\frac{1}{2}; 1 + 2i; 1 - 2i \right\rangle$$

— **Contrôle par la somme** : $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$, et $-\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ ✓

— **Contrôle par le produit** : $-\frac{1}{2} \times 5 = -\frac{5}{2}$, et $-\frac{d}{a} = -\frac{5}{2}$ ✓

Réponse. $S = \left\langle -\frac{1}{2}; 1 + 2i; 1 - 2i \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 - Identification complète

— **Contrôle préalable** : 1 doit être racine ✓

— **Calcul** : $1 - 5 + 17 - 13 = 0$ ✓

— **La factorisation est donc possible** ✓

— **Développement de la forme voulue** : $az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$ ✓

— **Regroupement** : $az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$ ✓

— **Terme en z^3** : $a = 1$ ✓

— **Terme constant** : $-c = -13$, donc $c = 13$ ✓

— **Terme en z^2** : $b - a = -5$, donc $b = -4$ ✓

— **Vérification sur le terme en z** : $c - b = 13 + 4 = 17$ ✓

— **Cohérence** : conforme au polynôme de départ ✓

— **Factorisation** :

$$z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = (z - 1)(z^2 - 4z + 13)$$

— **Second facteur** : discriminant $16 - 52 = -36$ ✓

— **Racine de l'opposé** : 6 ✓

— **Solutions** : $\frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \{1; 2 + 3i; 2 - 3i\}$$

— **Contrôle par la somme** : $1 + 4 = 5$, et $-\frac{b}{a} = 5$ ✓

— **Contrôle par le produit** : $1 \times (4 + 9) = 13$ ✓

— **Cohérence** : $-\frac{d}{a} = 13$ ✓

— **Contrôle par la somme des produits deux à deux** :

$$1 \times (2 + 3i) + 1 \times (2 - 3i) + (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 13 = 17 \quad \checkmark$$

— **Cohérence** : c'est bien $\frac{c}{a} = 17$ ✓

Réponse. $a = 1$, $b = -4$, $c = 13$, et $S = \{1; 2 + 3i; 2 - 3i\}$.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver deux coefficients

- **Exploitation des coefficients réels** : $\overline{1+2i} = 1-2i$ est aussi racine ✓
- **Troisième racine** : notons-la r ; elle est **réelle** ✓
- **Justification** : les racines non réelles vont par paires, il ne peut en rester une isolée ✓
- **Relation sur le produit** : $z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a} = -15$ ✓
- **Produit des deux premières** : $(1+2i)(1-2i) = 1+4 = 5$ ✓
- **Équation** : $5r = -15$, donc $r = -3$ ✓
- **Relation sur la somme** : $z_1 + z_2 + z_3 = -a$ ✓
- **Calcul de la somme** : $(1+2i) + (1-2i) + (-3) = -1$ ✓
- **Donc** : $-a = -1$, soit $a = 1$ ✓
- **Relation sur la somme des produits deux à deux** : elle vaut b ✓
- **Premier terme** : $(1+2i)(1-2i) = 5$ ✓
- **Les deux autres** : $-3[(1+2i) + (1-2i)] = -3 \times 2 = -6$ ✓
- **Somme** : $5 - 6 = -1$, donc $b = -1$ ✓
- **Polynôme obtenu** :

$$P(z) = z^3 + z^2 - z + 15$$

- **Vérification sur la racine réelle** : $-27 + 9 + 3 + 15 = 0$ ✓
- **Vérification sur $1+2i$** : $(1+2i)^2 = -3+4i$ ✓
- **Cube** : $(-3+4i)(1+2i) = -3-6i+4i-8 = -11-2i$ ✓
- **Somme complète** : $(-11-2i) + (-3+4i) - (1+2i) + 15 = 0$ ✓
- **Solutions** :

$$S = \{-3; 1+2i; 1-2i\}$$

Réponse. $a = 1$ et $b = -1$, soit $P(z) = z^3 + z^2 - z + 15$; $S = \{-3; 1+2i; 1-2i\}$.

Correction de l'exercice 7 - Factoriser par un trinôme réel

- **a) Puissances de i** : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ ✓
- **Substitution** : $1 - 2(-i) + 6(-1) - 2i + 5$ ✓
- **Développement** : $1 + 2i - 6 - 2i + 5$ ✓
- **Parties réelles** : $1 - 6 + 5 = 0$ ✓
- **Parties imaginaires** : $2 - 2 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $P(i) = 0$ ✓
- **Coefficients réels** : $\bar{i} = -i$ est donc aussi racine ✓
- **b) Facteur correspondant** : $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$ ✓
- **Forme cherchée** : $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Justification du coefficient dominant** : il vaut 1 des deux côtés ✓
- **Terme constant** : $c = 5$ ✓
- **Terme en z^3** : $b = -2$ ✓
- **Vérification sur le terme en z^2** : $c + 1 = 6$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $b = -2$ ✓
- **Cohérence** : conforme également ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 5)$$

— **Second trinôme** : discriminant $4 - 20 = -16$ ✓

— **Solutions** : $\frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \{i; -i; 1 + 2i; 1 - 2i\}$$

— **Contrôle du nombre** : degré 4, quatre racines ✓

— **Contrôle par la somme** : $0 + 2 = 2$, et $-\frac{b}{a} = 2$ ✓

— **Contrôle par le produit** : $1 \times 5 = 5$, et le terme constant vaut 5 ✓

Réponse. a) $P(i) = 0$, donc $-i$ aussi · b) $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 5)$ et $S = \{\pm i; 1 \pm 2i\}$.

Correction de l'exercice 8 - Une racine double

— **a) Critère du cours** : α est racine au moins double si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$ ✓

— **Valeur du polynôme** : $1 - 3 + 2 = 0$ ✓

— **Dérivée** : $P'(z) = 3z^2 - 3$ ✓

— **Valeur de la dérivée** : $3 - 3 = 0$ ✓

— **Conclusion** : 1 est racine au moins double ✓

— **b) Factorisation** : $P(z) = (z - 1)^2(z - \alpha)$ ✓

— **Justification du degré** : P est de degré 3, il reste un facteur de degré 1 ✓

— **Terme constant** : $(-1)^2 \times (-\alpha) = -\alpha$ ✓

— **Égalité** : $-\alpha = 2$, donc $\alpha = -2$ ✓

— **Factorisation** :

$$P(z) = (z - 1)^2(z + 2)$$

— **Vérification par développement** : $(z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1$ ✓

— **Produit** : $z^3 - 2z^2 + z + 2z^2 - 4z + 2$ ✓

— **Réduction** : $z^3 - 3z + 2$ ✓

— **Cohérence** : conforme ✓

— **Solutions** : $z = 1$ (double) et $z = -2$ ✓

— **Écriture** :

$$S = \{1; -2\}$$

— **Comptage avec multiplicité** : $1 + 1 + 1 = 3$ racines, conforme au degré ✓

— **Contrôle par la somme** : $1 + 1 - 2 = 0$, et le coefficient de z^2 est nul ✓

— **Contrôle par le produit** : $1 \times 1 \times (-2) = -2$, et $-\frac{d}{a} = -2$ ✓

— **Piège** : S ne contient que **deux** éléments, la multiplicité ne se note pas dans l'ensemble ✓

Réponse. a) $P(1) = P'(1) = 0$ · b) $P(z) = (z - 1)^2(z + 2)$, $S = \{1; -2\}$, avec 1 racine double.

Correction de l'exercice 9 - Degré 3 à coefficients complexes

— **a) Calculs préliminaires** : $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$ ✓

— **Premier terme** : $-i$ ✓

— **Deuxième terme** : $-(3 + i) \times (-1) = 3 + i$ ✓

— **Troisième terme** : $(2 + 3i)i = 2i - 3$ ✓

— **Quatrième terme** : $-2i$ ✓

— **Somme des parties réelles** : $0 + 3 - 3 + 0 = 0$ ✓

- **Somme des parties imaginaires** : $-1 + 1 + 2 - 2 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $P(i) = 0$ ✓
- **b) Attention** : les coefficients $-(3 + i)$, $2 + 3i$, $-2i$ ne sont **pas réels** ✓
- **Conséquence** : le théorème des racines conjuguées **ne s'applique pas** ✓
- **Test direct** : $(-i)^3 = i$, $(-i)^2 = -1$ ✓
- **Calcul** : $i + (3 + i) + (2 + 3i)(-i) - 2i$ ✓
- **Troisième terme** : $-2i + 3$ ✓
- **Total, parties réelles** : $3 + 3 = 6$ ✓
- **Conclusion** : $P(-i) \neq 0$, ce n'est pas une racine ✓
- **c) Factorisation** : $P(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $-ic = -2i$, donc $c = 2$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - i = -(3 + i)$, donc $b = -3$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - ib = 2 + 3i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z - i)(z^2 - 3z + 2)$$

- **Second facteur** : $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{i; 1; 2\}$$

- **Contrôle par la somme** : $i + 1 + 2 = 3 + i$, et $-\frac{b}{a} = 3 + i$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $i \times 1 \times 2 = 2i$, et $-\frac{d}{a} = 2i$ ✓

Réponse. a) $P(i) = 0$ · b) non, car les coefficients ne sont pas réels · c)
 $P(z) = (z - i)(z - 1)(z - 2)$ et $S = \{i; 1; 2\}$.

Correction de l'exercice 10 - Trois racines à trouver

- **Recherche d'une racine entière** : elle divise -10 ✓
- **Candidats** : $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ ✓
- **Essai de 1** : $1 - 6 + 13 - 10 = -2 \neq 0$ ✓
- **Essai de 2** : $8 - 24 + 26 - 10 = 0$ ✓
- **Racine trouvée** : 2 ✓
- **Factorisation** : $(z - 2)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $-2c = -10$, donc $c = 5$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - 2 = -6$, donc $b = -4$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - 2b = 5 + 8 = 13$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Factorisation** :

$$z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = (z - 2)(z^2 - 4z + 5)$$

- **Second facteur** : discriminant $16 - 20 = -4$ ✓
- **Racine de l'opposé** : 2 ✓
- **Solutions** : $\frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{2; 2 + i; 2 - i\}$$

- **Contrôle par la somme** : $2 + 2 + 2 = 6$, et $-\frac{b}{a} = 6$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $2 \times (4 + 1) = 10$ ✓
- **Cohérence** : $-\frac{d}{a} = 10$ ✓
- **Observation géométrique** : les trois images ont la même **abscisse** 2 ✓
- **Conséquence** : elles sont alignées sur la droite verticale d'équation $x = 2$ ✓

Réponse. $S = \{2; 2 + i; 2 - i\}$.

Correction de l'exercice 11 - Une équation réciproque

- **Observation de structure** : les coefficients 1, -5, 6, -5, 1 se lisent à l'endroit comme à l'envers ✓
- **Nom** : c'est une équation **réciproque** ✓
- **Vérification préalable** : $z = 0$ donnerait $1 = 0$, donc 0 n'est pas solution ✓
- **On peut diviser par z^2** : l'équation équivaut à

$$z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

- **Regroupement des termes symétriques** : $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$ ✓
- **Changement d'inconnue** : $u = z + \frac{1}{z}$ ✓
- **Calcul de u^2** : $z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$ ✓
- **Donc** : $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$ ✓
- **Équation en u** : $u^2 - 2 - 5u + 6 = 0$ ✓
- **Réduction** : $u^2 - 5u + 4 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $25 - 16 = 9$ ✓
- **Solutions** : $\frac{5 \pm 3}{2}$, donc $u = 4$ ou $u = 1$ ✓
- **Premier cas** : $z + \frac{1}{z} = 4$, soit $z^2 - 4z + 1 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $16 - 4 = 12$, positif ✓
- **Solutions** : $\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ✓
- **Second cas** : $z + \frac{1}{z} = 1$, soit $z^2 - z + 1 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $1 - 4 = -3$ ✓
- **Solutions** : $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- **Contrôle** : $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ ✓
- **Autre contrôle** : $\frac{1 + 3}{4} = 1$ ✓
- **Propriété générale observée** : dans une équation réciproque, les racines vont par paires de produit 1 ✓

Réponse. $S = \left\{ 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 12 - Somme des carrés des racines

- **a) Repérage** : $a = 1, b = 0, c = -3, d = 2$ ✓
- **Attention** : le coefficient de z^2 est **nul** ✓
- **Somme des racines** : $-\frac{b}{a} = 0$ ✓
- **Somme des produits deux à deux** : $\frac{c}{a} = -3$ ✓
- **b) Identité à utiliser** :

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$$

- **On isole la somme des carrés** : $S_2 = \left(\sum z_i\right)^2 - 2\sum_{i < j} z_i z_j$ ✓
- **Substitution** : $0^2 - 2 \times (-3)$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6$$

- **c) Racines connues** : 1 (double) et -2 ✓
- **Carrés** : 1, 1 et 4 ✓
- **Somme** : $1 + 1 + 4 = 6$ ✓
- **Cohérence** : conforme au calcul par les relations ✓
- **Contrôle de la somme** : $1 + 1 - 2 = 0$ ✓
- **Contrôle des produits deux à deux** : $1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times (-2)$ ✓
- **Calcul** : $1 - 2 - 2 = -3$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Contrôle du produit** : $1 \times 1 \times (-2) = -2$, et $-\frac{d}{a} = -2$ ✓
- **Intérêt de la méthode** : elle donne $\sum z_i^2$ **sans** résoudre l'équation ✓
- **Extension** : la même identité donne $\sum \frac{1}{z_i} = \frac{\sum_{i < j} z_i z_j}{z_1 z_2 z_3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ✓

Réponse. a) somme 0, somme des produits deux à deux -3 · b) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6$ · c) avec les racines 1, 1, -2 : $1 + 1 + 4 = 6$.

Correction de l'exercice 13 - Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

- **Première étape** : $z^6 - 1 = (z^3)^2 - 1$ ✓
 - **Identité** : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ✓
 - **Factorisation** : $(z^3 - 1)(z^3 + 1)$ ✓
 - **Premier facteur** : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ ✓
 - **Second facteur** : $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ ✓
 - **Factorisation sur $\mathbb{R}$** :
- $$z^6 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$$
- **Irréductibilité du premier trinôme** : discriminant $1 - 4 = -3 < 0$ ✓
 - **Irréductibilité du second** : discriminant $1 - 4 = -3 < 0$ ✓
 - **Conclusion** : aucun des deux ne se factorise davantage sur $\mathbb{R}$ ✓
 - **Racines du premier trinôme** : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓
 - **Racines du second** : $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓

- **Factorisation complète sur $\mathbb{C}$** : on remplace chaque trinôme par le produit de ses deux facteurs ✓
- **Les six racines** :

$$\pm 1 \quad \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

- **Vérification** : ce sont les six racines sixièmes de l'unité ✓
- **Modules** : $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ pour les quatre racines non réelles ✓
- **Cohérence** : tous les modules valent 1 ✓
- **Somme des six racines** : $1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓
- **Cohérence** : le coefficient de z^5 est nul dans $z^6 - 1$ ✓
- **À retenir** : sur $\mathbb{R}$, les facteurs irréductibles sont de degré 1 **ou** 2 ; sur $\mathbb{C}$, uniquement de degré 1 ✓

Réponse. Sur $\mathbb{R}$: $(z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$ · sur $\mathbb{C}$: les six facteurs $z \mp 1$ et $z - \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Un polynôme à construire

- **Troisième racine** : les coefficients sont réels, donc $\overline{3 - i} = 3 + i$ est racine ✓
- **Comptage** : trois racines, -1 , $3 - i$ et $3 + i$, pour un degré 3 ✓
- **Forme factorisée** : $P(z) = 2(z + 1)(z - 3 + i)(z - 3 - i)$ ✓
- **Regroupement des deux facteurs conjugués** : c'est $(A + B)(A - B)$ avec $A = z - 3$ et $B = i$ ✓
- **Produit** : $(z - 3)^2 - i^2 = (z - 3)^2 + 1$ ✓
- **Développement** : $z^2 - 6z + 9 + 1 = z^2 - 6z + 10$ ✓
- **Contrôle** : la somme des racines de ce trinôme vaut 6, et $(3 - i) + (3 + i) = 6$ ✓
- **Contrôle du produit** : $(3 - i)(3 + i) = 9 + 1 = 10$ ✓
- **Forme intermédiaire** :

$$P(z) = 2(z + 1)(z^2 - 6z + 10)$$

- **Développement, première partie** :
 $(z + 1)(z^2 - 6z + 10) = z^3 - 6z^2 + 10z + z^2 - 6z + 10$ ✓
- **Réduction** : $z^3 - 5z^2 + 4z + 10$ ✓
- **On multiplie par 2** :

$$P(z) = 2z^3 - 10z^2 + 8z + 20$$

- **Vérification du coefficient dominant** : 2 ✓
- **Vérification sur -1** : $-2 - 10 - 8 + 20 = 0$ ✓
- **Vérification sur $3 + i$** : $(3 + i)^2 = 8 + 6i$ ✓
- **Cube** : $(8 + 6i)(3 + i) = 24 + 8i + 18i - 6 = 18 + 26i$ ✓
- **Calcul complet** : $2(18 + 26i) - 10(8 + 6i) + 8(3 + i) + 20$ ✓
- **Parties réelles** : $36 - 80 + 24 + 20 = 0$ ✓
- **Parties imaginaires** : $52 - 60 + 8 = 0$ ✓
- **Cohérence** : $P(3 + i) = 0$ ✓

Réponse. $P(z) = 2(z + 1)(z^2 - 6z + 10) = 2z^3 - 10z^2 + 8z + 20$.

Correction de l'exercice 15 - Stabilité d'un filtre numérique

- **a) Factorisation** : $D(z) = (z - 0,5)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $-0,5c = -0,18$, donc $c = 0,36$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - 0,5 = -0,5$, donc $b = 0$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - 0,5b = 0,36$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Factorisation** :

$$D(z) = (z - 0,5)(z^2 + 0,36)$$

- **Second facteur** : $z^2 = -0,36$ ✓
- **Racine carrée** : $\sqrt{0,36} = 0,6$ ✓
- **Pôles complexes** : $z = 0,6i$ et $z = -0,6i$ ✓
- **Liste des trois pôles** : $0,5, 0,6i, -0,6i$ ✓
- **Modules** : $0,5, 0,6$ et $0,6$ ✓
- **Comparaison à 1** : tous sont strictement inférieurs à 1 ✓
- **Conclusion** : le filtre est **stable** ✓
- **b) Factorisation** : $D_2(z) = (z - 1,2)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $-1,2c = -1,2$, donc $c = 1$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - 1,2 = -1,2$, donc $b = 0$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - 1,2b = 1$ ✓
- **Factorisation** : $D_2(z) = (z - 1,2)(z^2 + 1)$ ✓
- **Pôles** : $1,2, i$ et $-i$ ✓
- **Modules** : $1,2, 1$ et 1 ✓
- **Premier critère violé** : $1,2 > 1$ ✓
- **Second problème** : les pôles $\pm i$ sont **sur** le cercle unité, donc pas strictement à l'intérieur ✓
- **Conclusion** : le filtre est **instable** ✓
- **c) Interprétation** : un pôle de module supérieur à 1 fait croître la réponse **géométriquement** à chaque échantillon ✓
- **Conséquence** : la sortie diverge, le signal sature puis se déforme ✓
- **Cas limite** : un pôle de module exactement 1 donne une oscillation d'amplitude constante, jamais amortie ✓
- **Règle de conception** : c'est pourquoi on vérifie **toujours** le module des pôles avant d'implémenter un filtre ✓

Réponse. a) pôles $0,5, \pm 0,6i$, de modules $0,5$ et $0,6$: filtre **stable** · b) pôles $1,2$ et $\pm i$, de modules $1,2$ et 1 : filtre **instable** · c) la sortie diverge au lieu de s'amortir.