Plaquette 3 – Degré 3 : racine évidente, identification et factorisation complète

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème de la racine. Si α est racine d'un polynôme P de degré n, alors $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$ où Q est de degré $n-1$.

Méthode d'identification, en degré 3. On écrit

$$az^3 + bz^2 + cz + d = (z-\alpha)\left(\alpha_2 z^2 + \beta z + \gamma\right)$$

puis on identifie dans l'ordre le plus rapide :

— le terme en z^3 donne $\alpha_2 = a$;
— le terme constant donne $-\alpha\gamma = d$;
— le terme en z^2 donne β ;
— le terme en z **sert de vérification**, il n'apporte rien de nouveau.

Quand la racine est une fraction $\frac{p}{q}$, on factorise plutôt par $(qz-p)$: les coefficients restent entiers.

Racines conjuguées. Si P est à coefficients **réels** et si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi. On peut alors factoriser directement par le trinôme réel

$$(z-z_0)(z-\overline{z_0}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2$$

Relations coefficients-racines en degré 3. Si z_1, z_2, z_3 sont les racines de az^3+bz^2+cz+d :

$$z_1+z_2+z_3 = -\frac{b}{a} \qquad z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = \frac{c}{a} \qquad z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}$$

Racine multiple. α est racine **au moins double** de P si et seulement si $P(\alpha)=0$ **et** $P'(\alpha)=0$.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité. C'est ce qui garantit qu'on trouvera toujours toutes les solutions.

Correction de l'exercice 1 – Les racines cubiques de l'unité par factorisation

1 est racine évidente de z^3-1, qui se factorise donc par $z-1$: $z^3-1 = (z-1)(az^2+bz+c)$. En identifiant, $a=1$, $c=1$ (terme constant) et $b-a=0$ (pas de terme en z^2), donc

$$z^3-1 = (z-1)\left(z^2+z+1\right)$$

c'est l'identité $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Le second facteur, de discriminant -3, a pour racines $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions sont 1 et $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **Contrôle** : leur somme $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ correspond à l'absence de terme en z^2, et leur produit $1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=1$ à $-\frac{d}{a}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$ et $S=\left\{1\,;\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Correction de l’exercice 2 – Une somme de cubes

$(-2)^3+8=0$: -2 est racine, et l’identité $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ avec $a=z$, $b=2$ donne

$$z^3+8=(z+2)\left(z^2-2z+4\right)$$

Le second facteur a pour discriminant $4-16=-12$ et pour racines $\dfrac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$. Les solutions sont -2 et $1\pm i\sqrt{3}$. **Contrôle** : les trois racines ont pour module 2, ce qui est attendu puisque $|z|^3=|-8|=8$; leur somme vaut 0 et leur produit $-2\times 4=-8=-\dfrac{d}{a}$.

Réponse. $z^3+8=(z+2)\left(z^2-2z+4\right)$ et $S=\left\{-2\,;\,1+i\sqrt{3}\,;\,1-i\sqrt{3}\right\}$.

Correction de l’exercice 3 – Chercher la racine évidente

Si P, unitaire à coefficients entiers, a une racine entière, elle divise le terme constant -12. On essaie 1 ($P(1)=-10$), 2 ($P(2)=-8$), puis 3 : $P(3)=27-27+12-12=0$. En identifiant $P(z)=(z-3)(z^2+bz+c)$: $-3c=-12$, donc $c=4$, et $b-3=-3$, donc $b=0$.

$$P(z)=(z-3)\left(z^2+4\right)$$

Le second facteur s’annule pour $z^2=-4$, soit $z=\pm 2i$. Les solutions sont 3, $2i$ et $-2i$. **Contrôle** : le coefficient de z vaut $c-3b=4$, et le produit des racines $3\times 4=12=-\dfrac{d}{a}$.

Réponse. 3 est racine, $P(z)=(z-3)\left(z^2+4\right)$ et $S=\{3\,;\,2i\,;\,-2i\}$.

Correction de l’exercice 4 – Une racine fractionnaire

Une racine $\dfrac{p}{2}$ a son numérateur p diviseur de 5 : on teste $\pm\dfrac{1}{2}$ et $\pm\dfrac{5}{2}$. Pour $-\dfrac{1}{2}$: $2\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)-3\times\dfrac{1}{4}-4+5=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}+1=0$. On factorise par $2z+1$, ce qui garde des coefficients entiers :

$$2z^3-3z^2+8z+5=(2z+1)\left(z^2-2z+5\right)$$

(le terme constant donne $c=5$, le terme en z^2 donne $2b+1=-3$, soit $b=-2$, et le terme en z vaut bien $2c+b=8$). Le trinôme a pour racines $1\pm 2i$. Les solutions sont $-\dfrac{1}{2}$ et $1\pm 2i$. **Contrôle** : la somme $-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}=-\dfrac{b}{a}$.

Réponse. $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;\,1+2i\,;\,1-2i\right\}$.

Correction de l’exercice 5 – Identification complète

1 est racine ($1-5+17-13=0$), donc la factorisation est possible. En développant, $(z-1)(az^2+bz+c)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$, et l’identification donne $a=1$, $c=13$ puis $b-1=-5$, soit $b=-4$; le coefficient de z, $c-b=17$, est bien celui du polynôme.

$$z^3-5z^2+17z-13=(z-1)\left(z^2-4z+13\right)$$

Le trinôme a pour discriminant $16-52=-36$ et pour racines $\dfrac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$. Les solutions sont 1, $2+3i$ et $2-3i$. **Contrôle** : la somme $1+4=5=-\dfrac{b}{a}$ et le produit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$1 \times 13 = 13 = -\frac{d}{a}$.

Réponse. $a = 1$, $b = -4$, $c = 13$, et $S = \{1\,;2+3i\,;2-3i\}$.

Correction de l'exercice 6 – Retrouver deux coefficients

Les coefficients sont réels, donc $1-2i$ est aussi racine ; la troisième racine r est réelle, les racines non réelles allant par paires. Le produit des trois racines vaut $-\frac{d}{a} = -15$:

$$(1+2i)(1-2i)\,r = 5r = -15 \Leftrightarrow r = -3$$

La somme des racines vaut $-a$: $(1+2i)+(1-2i)-3 = -1$, donc $a = 1$. La somme des produits deux à deux vaut b : $5 - 3\times 2 = -1$, donc $b = -1$. Ainsi $P(z) = z^3 + z^2 - z + 15$, de racines -3 et $1 \pm 2i$. **Contrôle** : $P(-3) = -27 + 9 + 3 + 15 = 0$.

Réponse. $a = 1$ et $b = -1$, soit $P(z) = z^3 + z^2 - z + 15$; $S = \{-3\,;1+2i\,;1-2i\}$.

Correction de l'exercice 7 – Factoriser par un trinôme réel

a) Avec $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$: $P(i) = 1 + 2i - 6 - 2i + 5 = 0$. Les coefficients étant réels, $-i$ est aussi racine.

b) P est donc divisible par $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$: $P(z) = (z^2+1)(z^2+bz+c)$. Le terme constant donne $c = 5$ et le terme en z^3 donne $b = -2$; les termes en z^2 ($c + 1 = 6$) et en z ($b = -2$) concordent.

$$P(z) = \left(z^2+1\right)\left(z^2-2z+5\right)$$

Le second trinôme a pour racines $1 \pm 2i$. Les solutions sont $\pm i$ et $1 \pm 2i$. **Contrôle** : la somme des racines vaut $2 = -\frac{b}{a}$.

Réponse. a) $P(i) = 0$, donc $-i$ aussi · b) $P(z) = \left(z^2+1\right)\left(z^2-2z+5\right)$ et $S = \{\pm i\,;1 \pm 2i\}$.

Correction de l'exercice 8 – Une racine double

a) Un nombre α est racine au moins double de P si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Ici $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et, avec $P'(z) = 3z^2 - 3$, $P'(1) = 0$.

b) On écrit donc $P(z) = (z-1)^2(z-\alpha)$; le terme constant donne $-\alpha = 2$, soit $\alpha = -2$:

$$P(z) = (z-1)^2(z+2)$$

Contrôle : $(z^2-2z+1)(z+2) = z^3 - 3z + 2$. Les solutions sont 1 (racine double) et -2 : l'ensemble $S = \{1\,;-2\}$ n'a que deux éléments, mais compte tenu de la multiplicité, on a bien trois racines pour un degré 3. Leur somme $1 + 1 - 2 = 0$ correspond à l'absence de terme en z^2.

Réponse. a) $P(1) = P'(1) = 0$ · b) $P(z) = (z-1)^2(z+2)$, $S = \{1\,;-2\}$, avec 1 racine double.

Correction de l'exercice 9 – Degré 3 à coefficients complexes

a) Avec $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$: $P(i) = -i + (3+i) + (2i-3) - 2i$, dont la partie réelle $3 - 3$ et la partie imaginaire $-1 + 1 + 2 - 2$ sont nulles.

b) Les coefficients ne sont pas réels : le théorème des racines conjuguées ne s'applique pas. D'ailleurs $P(-i) = i + (3+i) + (3-2i) - 2i$ a pour partie réelle $6 \neq 0$: $-i$ n'est pas racine.

c) On écrit $P(z) = (z-i)(z^2+bz+c)$: le terme constant donne $-ic = -2i$, soit $c = 2$, et le terme en z^2 donne $b - i = -3 - i$, soit $b = -3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(z) = (z-i)\left(z^2 - 3z + 2\right) = (z-i)(z-1)(z-2)$$

Les solutions sont i, 1 et 2. **Contrôle** : leur somme $3+i$ et leur produit $2i$ correspondent à $-\frac{b}{a}$ et $-\frac{d}{a}$.

Réponse. a) $P(i) = 0$ · b) non, car les coefficients ne sont pas réels · c) $P(z) = (z-i)(z-1)(z-2)$ et $S = \{i\,;1\,;2\}$.

Correction de l’exercice 10 – Trois racines à trouver

Une racine entière divise -10 : $P(1) = -2$, mais $P(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$. En identifiant $(z-2)(z^2+bz+c)$: $-2c = -10$, donc $c = 5$, et $b - 2 = -6$, donc $b = -4$; le terme en z, $c - 2b = 13$, concorde.

$$z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = (z-2)\left(z^2 - 4z + 5\right)$$

Le trinôme a pour discriminant -4 et pour racines $2 \pm i$. Les solutions sont 2, $2+i$ et $2-i$. **Contrôle** : la somme 6 et le produit $2 \times 5 = 10$ correspondent aux coefficients. Les trois images ont la même abscisse 2 : elles sont alignées sur la droite d’équation $x = 2$.

Réponse. $S = \{2\,;2+i\,;2-i\}$.

Correction de l’exercice 11 – Une équation réciproque

Les coefficients 1, -5, 6, -5, 1 se lisent dans les deux sens : l’équation est réciproque. Comme 0 n’est pas solution, on divise par z^2 et l’on regroupe les termes symétriques :

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$$

Avec $u = z + \frac{1}{z}$, on a $u^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$, donc l’équation devient $u^2 - 5u + 4 = 0$, de solutions $u = 4$ et $u = 1$. L’équation $z + \frac{1}{z} = 4$ s’écrit $z^2 - 4z + 1 = 0$, de solutions $2 \pm \sqrt{3}$; l’équation $z + \frac{1}{z} = 1$ s’écrit $z^2 - z + 1 = 0$, de solutions $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **Contrôle** : $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$; dans une équation réciproque, les racines vont par paires d’inverses.

Réponse. $S = \left\langle 2+\sqrt{3}\,;2-\sqrt{3}\,;\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\rangle$.

Correction de l’exercice 12 – Somme des carrés des racines

a) Pour $z^3 + 0z^2 - 3z + 2$: la somme des racines vaut $-\frac{b}{a} = 0$, la somme des produits deux à deux vaut $\frac{c}{a} = -3$.

b) En développant le carré de la somme,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1+z_2+z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0 - 2 \times (-3) = 6$$

c) D’après l’exercice 8, les racines sont 1, 1 et -2 : $1 + 1 + 4 = 6$. Les relations donnent ce résultat sans résoudre l’équation. On obtiendrait de même $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{z_1z_2z_3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Réponse. a) somme 0, somme des produits deux à deux -3 · b) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6$ · c) avec les racines 1, 1, -2 : $1 + 1 + 4 = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Factoriser sur R et sur C

$z^6-1=(z^3-1)(z^3+1)$, différence de deux carrés, puis $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ et $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$:

$$z^6-1=(z-1)(z+1)\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)$$

Les deux trinômes ont pour discriminant $-3<0$: ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, et c'est la factorisation demandée sur $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, chacun se décompose avec ses racines, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$: z^6-1 est le produit des six facteurs $z-\omega$, où ω décrit ±1 et $\frac{\pm1\pm i\sqrt{3}}{2}$, les six racines sixièmes de l'unité. **Contrôle** : elles sont toutes de module 1, et leur somme est nulle, comme le coefficient de z^5.

Réponse. Sur $\mathbb{R}$: $(z-1)(z+1)\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)$ · sur $\mathbb{C}$: les six facteurs $z\mp1$ et $z-\frac{\pm1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Un polynôme à construire

Les coefficients étant réels, $3+i$ est aussi racine : P a pour racines -1, $3-i$ et $3+i$, et $P(z)=2(z+1)(z-3+i)(z-3-i)$. Les deux derniers facteurs forment $(A+B)(A-B)$ avec $A=z-3$ et $B=i$:

$$(z-3)^2-i^2=z^2-6z+10 \qquad P(z)=2(z+1)\left(z^2-6z+10\right)=2z^3-10z^2+8z+20$$

Contrôle : $P(-1)=-2-10-8+20=0$; et avec $(3+i)^2=8+6i$, $(3+i)^3=18+26i$, $P(3+i)$ a pour partie réelle $36-80+24+20=0$ et pour partie imaginaire $52-60+8=0$.

Réponse. $P(z)=2(z+1)\left(z^2-6z+10\right)=2z^3-10z^2+8z+20$.

Correction de l'exercice 15 – Stabilité d'un filtre numérique

a) On factorise par $z-0{,}5$: $D(z)=(z-0{,}5)(z^2+bz+c)$ avec $-0{,}5c=-0{,}18$, soit $c=0{,}36$, et $b-0{,}5=-0{,}5$, soit $b=0$:

$$D(z)=(z-0{,}5)\left(z^2+0{,}36\right)$$

Les pôles sont $0{,}5$ et $\pm0{,}6i$, de modules $0{,}5$ et $0{,}6$, tous strictement inférieurs à 1 : le filtre est stable.

b) De même, $D_2(z)=(z-1{,}2)(z^2+1)$, de pôles $1{,}2$ et $\pm i$, de modules $1{,}2$ et 1. Le pôle $1{,}2$ est hors du disque unité, et $\pm i$ sont sur le cercle, pas strictement à l'intérieur : le filtre est instable.

c) Un pôle de module supérieur à 1 fait croître la réponse géométriquement d'un échantillon à l'autre : la sortie diverge et sature. Un pôle de module 1 donne une oscillation qui ne s'amortit jamais. C'est pourquoi on vérifie le module des pôles avant d'utiliser un filtre.

Réponse. a) pôles $0{,}5$, $\pm0{,}6i$, de modules $0{,}5$ et $0{,}6$: filtre **stable** · b) pôles $1{,}2$ et $\pm i$, de modules $1{,}2$ et 1 : filtre **instable** · c) la sortie diverge au lieu de s'amortir.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).