

Plaquette 4 - Degré 4 et au-delà : changements d'inconnue et équations $z^n = a$

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation bicarrée $az^4 + bz^2 + c = 0$. On pose $Z = z^2$, on résout $aZ^2 + bZ + c = 0$, puis pour **chaque** valeur de Z on résout $z^2 = Z$ — ce qui donne deux racines complexes opposées, même si Z est négatif ou complexe.

Équation en z^{2n} ou z^{3n} . Même principe avec $Z = z^3$, $Z = z^n$: le degré est divisé, puis on extrait des racines n -ièmes.

Équation réciproque $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ (coefficients palindromes). Comme 0 n'est pas solution, on divise par z^2 et on pose

$$u = z + \frac{1}{z} \quad \text{avec} \quad z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$$

L'équation devient du second degré en u ; on revient ensuite à z par $z^2 - uz + 1 = 0$.

Équation $z^n = a$. Avec $a = \rho e^{i\alpha}$ et $\rho > 0$, les n solutions sont

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Identité de Sophie Germain. Elle factorise ce qui semble irréductible :

$$z^4 + 4 = (z^2 + 2)^2 - (2z)^2 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$$

Translation d'inconnue. Une équation en $(z - \alpha)^n$ se résout en posant $w = z - \alpha$: on résout $w^n = a$, puis $z = w + \alpha$.

Multiplicité. Un facteur $(z^2 + 1)^2$ signifie que i et $-i$ sont racines **doubles** : elles comptent chacune pour deux dans le total des n racines.

Correction de l'exercice 1 - Bicarrée à solutions réelles

- **Changement d'inconnue** : on pose $Z = z^2$ ✓
- **Équation obtenue** : $Z^2 - 5Z + 4 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $25 - 16 = 9$ ✓
- **Racine** : 3 ✓
- **Solutions en Z** : $\frac{5 \pm 3}{2}$, soit $Z = 4$ ou $Z = 1$ ✓
- **Premier cas** : $z^2 = 4$ ✓
- **Solutions** : $z = 2$ ou $z = -2$ ✓
- **Second cas** : $z^2 = 1$ ✓
- **Solutions** : $z = 1$ ou $z = -1$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$
- **Contrôle du nombre** : degré 4, quatre racines distinctes ✓
- **Factorisation** : $z^4 - 5z^2 + 4 = (z^2 - 1)(z^2 - 4)$ ✓
- **Développement de contrôle** : $z^4 - 4z^2 - z^2 + 4 = z^4 - 5z^2 + 4$ ✓

- **Factorisation complète** : $(z - 1)(z + 1)(z - 2)(z + 2)$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $-2 - 1 + 1 + 2 = 0$ ✓
- **Cohérence** : il n'y a pas de terme en z^3 ✓
- **Contrôle par le produit** : $(-2)(-1)(1)(2) = 4$ ✓
- **Cohérence** : le terme constant vaut 4 et le degré est pair ✓
- **Remarque** : ici $\mathbb{C}$ n'apporte rien, les quatre racines sont réelles ✓

Réponse. $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Correction de l'exercice 2 - Bicarrée à solutions imaginaires pures

- **Changement d'inconnue** : $Z = z^2$ ✓
- **Équation** : $Z^2 + 5Z + 6 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $25 - 24 = 1$ ✓
- **Solutions en Z** : $\frac{-5 \pm 1}{2}$, soit $Z = -2$ ou $Z = -3$ ✓
- **Observation** : les deux valeurs sont **négligables** ✓
- **Conséquence** : aucune solution réelle, mais quatre solutions complexes ✓
- **Premier cas** : $z^2 = -2$ ✓
- **Écriture** : $-2 = (i\sqrt{2})^2$ ✓
- **Solutions** : $z = \pm i\sqrt{2}$ ✓
- **Second cas** : $z^2 = -3$ ✓
- **Solutions** : $z = \pm i\sqrt{3}$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$$
- **Valeurs approchées** : $\pm 1,414i$ et $\pm 1,732i$ ✓
- **Vérification pour $z = i\sqrt{2}$** : $z^2 = -2$ et $z^4 = 4$ ✓
- **Calcul** : $4 + 5 \times (-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Position des images** : les quatre points sont sur l'axe des imaginaires purs ✓
- **Factorisation** : $(z^2 + 2)(z^2 + 3)$ ✓
- **Irréductibilité sur $\mathbb{R}$** : les deux trinômes ont un discriminant négatif ✓
- **Piège** : conclure « pas de solution » parce que $Z < 0$ — c'est l'erreur du cours de Première, corrigée dans $\mathbb{C}$ ✓

Réponse. $S = \{\pm i\sqrt{2}; \pm i\sqrt{3}\}$.

Correction de l'exercice 3 - Deux chemins pour la même équation

- **Première méthode, factorisation** : $z^4 - 16 = (z^2)^2 - 4^2$ ✓
- **Identité** : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ✓
- **Factorisation** : $(z^2 - 4)(z^2 + 4)$ ✓
- **Premier facteur** : $z^2 = 4$, donc $z = \pm 2$ ✓
- **Second facteur** : $z^2 = -4$, donc $z = \pm 2i$ ✓
- **Solutions** :

$$S = \{2; -2; 2i; -2i\}$$

- **Seconde méthode** : on écrit $16 = 16e^{i0}$ ✓

- **On pose** : $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ ✓
- **Modules** : $r^4 = 16$, donc $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $4\theta = 2k\pi$, donc $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Quatre angles** : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ✓
- **Solutions** : $2, 2i, -2, -2i$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent le même ensemble ✓
- **Comparaison** : la factorisation est plus rapide **ici**, parce que 16 est une puissance quatrième ✓
- **Avantage de l'exponentielle** : elle marche pour **n'importe quel** second membre ✓
- **Exemple** : $z^4 = 5$ ne se factorise pas agréablement ✓
- **Solutions dans ce cas** : $\sqrt[4]{5} e^{i\frac{k\pi}{2}}$, soit $\pm\sqrt[4]{5}$ et $\pm i\sqrt[4]{5}$ ✓
- **Contrôle géométrique** : les quatre images forment un carré de sommets sur les axes ✓
- **Somme des solutions** : 0, conforme à l'absence de terme en z^3 ✓

Réponse. $S = \{\pm 2; \pm 2i\}$; la factorisation est plus rapide ici, l'exponentielle est la méthode générale.

Correction de l'exercice 4 - L'identité de Sophie Germain

- **a) Astuce de départ** : faire apparaître un carré ✓
- **Écriture** : $z^4 + 4 = z^4 + 4z^2 + 4 - 4z^2$ ✓
- **Reconnaissance** : $z^4 + 4z^2 + 4 = (z^2 + 2)^2$ ✓
- **Expression** : $(z^2 + 2)^2 - (2z)^2$ ✓
- **Identité** : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ✓
- **Facteurs** : $(z^2 + 2 - 2z)(z^2 + 2 + 2z)$ ✓
- **Réécriture** :

$$z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$$
- **Contrôle numérique en $z = 3$** : $81 + 4 = 85$ ✓
- **Produit** : $(9 - 6 + 2)(9 + 6 + 2) = 5 \times 17 = 85$ ✓
- **b) Premier facteur** : $z^2 - 2z + 2 = 0$, discriminant $4 - 8 = -4$ ✓
- **Solutions** : $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$ ✓
- **Second facteur** : $z^2 + 2z + 2 = 0$, discriminant -4 ✓
- **Solutions** : $\frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{1 + i; 1 - i; -1 + i; -1 - i\}$$
- **c) Par l'exponentielle** : $-4 = 4 e^{i\pi}$ ✓
- **Modules** : $r^4 = 4$, donc $r = \sqrt{2}$ ✓
- **Arguments** : $4\theta = \pi + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Premier** : $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$ ✓
- **Les trois autres** : obtenus en multipliant par i ✓
- **Liste** : $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$ ✓

- **Cohérence** : les deux méthodes coïncident ✓
- **Position** : les quatre points forment un carré de côté 2, centré en O ✓

Réponse. b) et c) $S = \{\pm 1 \pm i\}$, les quatre sommets d'un carré de côté 2 centré en O .

Correction de l'exercice 5 - Une équation en z^3

- **Changement d'inconnue** : on pose $Z = z^3$ ✓
- **Justification** : $z^6 = (z^3)^2$ ✓
- **Équation obtenue** : $Z^2 - 7Z - 8 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $49 + 32 = 81$ ✓
- **Racine** : 9 ✓
- **Solutions en Z** : $\frac{7 \pm 9}{2}$, soit $Z = 8$ ou $Z = -1$ ✓
- **Premier cas** : $z^3 = 8$ ✓
- **Module** : $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ ✓
- **Solutions** : $2, 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}, 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$ ✓
- **Second cas** : $z^3 = -1$ ✓
- **Module** : $r = 1$ ✓
- **Arguments** : $3\theta = \pi + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}$ ✓
- **Solutions** : $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Ensemble complet** :

$$S = \left\{ 2; -1 \pm i\sqrt{3}; -1; \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- **Contrôle du nombre** : six solutions pour une équation de degré 6 ✓
- **Vérification pour $z = -1$** : $z^6 = 1$ et $z^3 = -1$ ✓
- **Calcul** : $1 + 7 - 8 = 0$ ✓
- **Vérification pour $z = 2$** : $64 - 56 - 8 = 0$ ✓
- **Contrôle des modules** : trois solutions de module 2, trois de module 1 ✓
- **Cohérence** : elles se répartissent sur deux cercles concentriques ✓

Réponse. $S = \left\{ 2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}; -1; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 6 - Racines cinquièmes

- **Second membre** : $32 = 32e^{i0}$ ✓
- **Modules** : $r^5 = 32$, donc $r = 2$ ✓
- **Justification** : $2^5 = 32$, et la racine cinquième réelle positive est unique ✓
- **Arguments** : $5\theta = 2k\pi$, donc $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ ✓
- **Cinq valeurs** : k de 0 à 4 ✓
- **Solutions** :

$$z_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{5}} \quad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

- **Solution réelle** : il faut $\frac{2k\pi}{5} \equiv 0$ ou π modulo 2π ✓
- **Cas $\theta = 0$** : $k = 0$, donc $z = 2$ ✓

- **Cas $\theta = \pi$** : il faudrait $\frac{2k}{5} = 1$, soit $k = \frac{5}{2}$, qui n'est pas entier ✓
- **Conclusion** : une **seule** solution réelle, $z = 2$ ✓
- **Explication générale** : pour n impair, $z^n = a$ avec a réel positif a exactement une racine réelle ✓
- **Les quatre autres** : deux paires de conjuguées ✓
- **Justification** : les coefficients de $z^5 - 32$ sont réels ✓
- **Valeurs approchées** : $2 e^{i\frac{2\pi}{5}} \approx 0,618 + 1,902i$ ✓
- **Second** : $2 e^{i\frac{4\pi}{5}} \approx -1,618 + 1,176i$ ✓
- **Contrôle des modules** : $\sqrt{0,618^2 + 1,902^2} \approx 2$ ✓
- **Contrôle de la somme** : les cinq points forment un pentagone régulier centré en O , leur somme est nulle ✓
- **Cohérence** : $z^5 - 32$ n'a pas de terme en z^4 ✓

Réponse. $z_k = 2 e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ pour k de 0 à 4 ; une seule est réelle, $z = 2$.

Correction de l'exercice 7 - Racines quatrièmes d'un complexe

- **Module du second membre** : $\sqrt{64 + 192}$ ✓
- **Calcul** : $\sqrt{256} = 16$ ✓
- **Cosinus de l'argument** : $\frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ ✓
- **Sinus** : $\frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Quadrant** : cosinus négatif, sinus positif ✓
- **Argument** : $\frac{2\pi}{3}$ ✓
- **Forme exponentielle** : $-8 + 8i\sqrt{3} = 16 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ✓
- **Modules des solutions** : $r^4 = 16$, donc $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ✓
- **Donc** : $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Quatre angles** : $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$ ✓
- **Solutions** :

$$z_k = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)} \quad 0 \leq k \leq 3$$

- **Première sous forme algébrique** : $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$ ✓
- **Les autres, par multiplication par i** : $-1 + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i, 1 - i\sqrt{3}$ ✓
- **Justification** : multiplier par i ajoute $\frac{\pi}{2}$ à l'argument ✓
- **Vérification de la première** : $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ✓
- **On élève encore au carré** : $(2 + 2i\sqrt{3})^2 = 4 + 8i\sqrt{3} - 12$ ✓
- **Résultat** : $-8 + 8i\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : conforme au second membre ✓
- **Contrôle de la somme** : les quatre solutions vont deux à deux opposées, leur somme est nulle ✓

Réponse. $S = \{\sqrt{3} + i; -1 + i\sqrt{3}; -\sqrt{3} - i; 1 - i\sqrt{3}\}$, soit $2 e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}$.

Correction de l'exercice 8 - Une réciproque avec racine double

- **Observation** : les coefficients 1, 2, -6, 2, 1 se lisent dans les deux sens ✓
 - **Nature** : équation réciproque ✓
 - **Préalable** : $z = 0$ donnerait $1 = 0$, donc 0 n'est pas solution ✓
 - **On divise par z^2** : $z^2 + 2z - 6 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$ ✓
 - **Regroupement** : $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 6 = 0$ ✓
 - **Changement d'inconnue** : $u = z + \frac{1}{z}$, avec $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$ ✓
 - **Équation en u** : $u^2 - 2 + 2u - 6 = 0$ ✓
 - **Réduction** : $u^2 + 2u - 8 = 0$ ✓
 - **Discriminant** : $4 + 32 = 36$ ✓
 - **Solutions** : $\frac{-2 \pm 6}{2}$, soit $u = 2$ ou $u = -4$ ✓
 - **Premier cas** : $z + \frac{1}{z} = 2$, soit $z^2 - 2z + 1 = 0$ ✓
 - **Reconnaissance** : $(z - 1)^2 = 0$ ✓
 - **Solution** : $z = 1$, racine **double** ✓
 - **Second cas** : $z + \frac{1}{z} = -4$, soit $z^2 + 4z + 1 = 0$ ✓
 - **Discriminant** : $16 - 4 = 12$, positif ✓
 - **Solutions** : $\frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$ ✓
 - **Ensemble des solutions** :

$$S = \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$$
 - **Comptage avec multiplicité** : $2 + 1 + 1 = 4$, conforme au degré ✓
 - **Vérification pour $z = 1$** : $1 + 2 - 6 + 2 + 1 = 0$ ✓
 - **Contrôle** : $(-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ ✓
 - **Cohérence** : dans une équation réciproque, les racines vont par paires de produit 1 ✓
 - **Cas de $z = 1$** : elle est sa propre partenaire, ce qui explique la multiplicité paire ✓
- Réponse.** $S = \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$, avec 1 racine double.

Correction de l'exercice 9 - Translation d'inconnue

- **Changement d'inconnue** : on pose $w = z - 1$ ✓
- **Équation** : $w^4 = 16$ ✓
- **Solutions en w** : ce sont les racines quatrièmes de 16 ✓
- **Modules** : $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ✓
- **Valeurs** : 2, $2i$, -2 , $-2i$ ✓
- **Retour à z** : $z = w + 1$ ✓
- **Solutions** :

$$S = \{3; 1 + 2i; -1; 1 - 2i\}$$
- **Vérification pour $z = 3$** : $(3 - 1)^4 = 2^4 = 16$ ✓
- **Vérification pour $z = 1 + 2i$** : $(2i)^4 = 16$ ✓

- **Justification** : $(2i)^2 = -4$ et $(-4)^2 = 16$ ✓
- **Vérification pour $z = -1$** : $(-2)^4 = 16$ ✓
- **Position des images** : ce sont les images des racines de $w^4 = 16$, **translatées** de 1 ✓
- **Description** : quatre points sur le cercle de centre $\Omega(1; 0)$ et de rayon 2 ✓
- **Forme du quadrilatère** : un **carré**, dont les diagonales sont portées par les axes du repère centré en Ω ✓
- **Longueur du côté** : $2R \sin \frac{\pi}{4} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle** : $|3 - (1 + 2i)| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Contrôle par la somme** : $3 + 1 + 2i - 1 + 1 - 2i = 4$ ✓
- **Vérification** : en développant, l'équation s'écrit $z^4 - 4z^3 + \dots = 0$, de somme des racines 4 ✓

Réponse. $S = \{3; 1 + 2i; -1; 1 - 2i\}$: un carré de côté $2\sqrt{2}$ inscrit dans le cercle de centre $\Omega(1; 0)$ et de rayon 2.

Correction de l'exercice 10 - Une équation avec conjugué

- **Première étape** : passer aux modules ✓
- **Membre de gauche** : $|z^4| = |z|^4$ ✓
- **Membre de droite** : $|\bar{z}| = |z|$ ✓
- **Équation** : $|z|^4 = |z|$ ✓
- **Factorisation** : $|z|(|z|^3 - 1) = 0$ ✓
- **Deux cas** : $|z| = 0$ ou $|z| = 1$ ✓
- **Premier cas** : $z = 0$, qui convient ✓
- **Vérification** : $0^4 = 0 = \bar{0}$ ✓
- **Second cas** : $|z| = 1$, donc $z\bar{z} = 1$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ✓
- **On remplace** : $z^4 = \frac{1}{z}$ ✓
- **On multiplie par z** , licite car $z \neq 0$:

$$z^5 = 1$$
- **Solutions** : les cinq racines cinquièmes de l'unité ✓
- **Liste** : $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ pour k de 0 à 4 ✓
- **Nombre total** : $5 + 1 = 6$ solutions ✓
- **Attention** : l'équation n'est **pas** polynomiale en z seul, le degré apparent 4 n'a pas de sens ✓
- **Vérification pour $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$** : $z^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$ ✓
- **Conjugué** : $\bar{z} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{8\pi}{5}}$ ✓
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite ✓
- **Position des images** : l'origine, plus les cinq sommets d'un pentagone régulier sur le cercle unité ✓
- **Piège** : oublier $z = 0$, ou ne retenir que $z = 1$ ✓

Réponse. $S = \{0\}$ réuni aux cinq racines cinquièmes de l'unité : **six** solutions.

Correction de l'exercice 11 - Une bicarrée à paramètre

- **a) Substitution** : $i^2 = -1$ et $i^4 = 1$ ✓
- **Équation** : $1 - (m + 2) \times (-1) + 2m = 0$ ✓
- **Développement** : $1 + m + 2 + 2m = 0$ ✓
- **Réduction** : $3m + 3 = 0$ ✓
- **Solution** : $m = -1$ ✓
- **b) Équation obtenue** : $z^4 - (-1 + 2)z^2 + 2 \times (-1) = 0$ ✓
- **Simplification** : $z^4 - z^2 - 2 = 0$ ✓
- **Changement d'inconnue** : $Z = z^2$ ✓
- **Équation** : $Z^2 - Z - 2 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $1 + 8 = 9$ ✓
- **Solutions en Z** : $\frac{1 \pm 3}{2}$, soit $Z = 2$ ou $Z = -1$ ✓
- **Premier cas** : $z^2 = 2$, donc $z = \pm\sqrt{2}$ ✓
- **Second cas** : $z^2 = -1$, donc $z = \pm i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; i; -i\}$$

- **Contrôle** : i est bien solution, comme demandé au a) ✓
- **Vérification directe** : $1 - (-1) - 2 = 0$ ✓
- **Factorisation** : $z^4 - z^2 - 2 = (z^2 - 2)(z^2 + 1)$ ✓
- **Développement de contrôle** : $z^4 + z^2 - 2z^2 - 2 = z^4 - z^2 - 2$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $\sqrt{2} - \sqrt{2} + i - i = 0$ ✓
- **Cohérence** : pas de terme en z^3 ✓
- **Contrôle par le produit** : $-2 \times 1 = -2$ ✓
- **Cohérence** : le terme constant vaut -2 et le degré est pair ✓

Réponse. a) $m = -1$ · b) $S = \{\pm\sqrt{2}; \pm i\}$.

Correction de l'exercice 12 - Un système somme-produit

- **Principe** : z et w sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 4$ et $P = 13$ ✓
- **Équation** : $X^2 - 4X + 13 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $16 - 52 = -36$ ✓
- **Racine de l'opposé** : 6 ✓
- **Solutions** : $\frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$ ✓
- **Couples solutions** : le système est symétrique, il y a **deux** couples ✓
- **Réponse** :

$$(z; w) = (2 + 3i; 2 - 3i) \quad \text{ou} \quad (z; w) = (2 - 3i; 2 + 3i)$$

- **Vérification de la somme** : $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ ✓
- **Vérification du produit** : $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$ ✓
- **Modules** : $|2 + 3i| = \sqrt{4 + 9}$ ✓
- **Valeur** :

$$|z| = |w| = \sqrt{13} \approx 3,606$$

- **Contrôle** : $|z| \times |w| = 13 = |zw|$ ✓

- **Cohérence** : conforme à la multiplicativité du module ✓
- **Remarque** : dans $\mathbb{R}$, ce système n'a **aucune** solution ✓
- **Justification** : deux réels de somme 4 ont un produit au plus 4 ✓
- **Démonstration** : $x(4 - x) = -x^2 + 4x$, maximal en $x = 2$, de valeur 4 ✓
- **Comparaison** : $13 > 4$ ✓
- **Interprétation géométrique** : les deux images sont symétriques par rapport à l'axe des réels ✓

Réponse. $\{z; w\} = \{2 + 3i; 2 - 3i\}$, avec $|z| = |w| = \sqrt{13}$.

Correction de l'exercice 13 - Une racine commune

- **Méthode** : si z_0 est racine commune, alors $P(z_0) - Q(z_0) = 0$ ✓
- **Différence** : $(z^2 + az + 2) - (z^2 + 2z + a)$ ✓
- **Les termes en z^2 disparaissent** ✓
- **Expression** : $(a - 2)z + 2 - a$ ✓
- **Mise en facteur** : $(a - 2)(z - 1)$ ✓
- **Équation** : $(a - 2)(z_0 - 1) = 0$ ✓
- **Premier cas** : $a = 2$ ✓
- **Alors** : $P(z) = z^2 + 2z + 2$ et $Q(z) = z^2 + 2z + 2$ ✓
- **Constat** : les deux polynômes sont **identiques**, toutes leurs racines sont communes ✓
- **Racines** : discriminant $4 - 8 = -4$, donc $-1 \pm i$ ✓
- **Second cas** : $z_0 = 1$ ✓
- **Condition** : $P(1) = 0$, soit $1 + a + 2 = 0$ ✓
- **Donc** : $a = -3$ ✓
- **Vérification sur Q** : $Q(1) = 1 + 2 - 3 = 0$ ✓
- **Cohérence** : 1 est bien racine des deux ✓
- **Valeurs trouvées** :

$$a = 2 \quad \text{ou} \quad a = -3$$

- **Les autres racines pour $a = -3$** : $P(z) = z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$ ✓
- **Et** : $Q(z) = z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)$ ✓
- **Constat** : la seule racine commune est 1 ✓
- **Contrôle du raisonnement** : la condition trouvée est **nécessaire**, on a bien vérifié qu'elle est suffisante ✓

Réponse. $a = 2$ (les deux polynômes sont alors identiques, de racines $-1 \pm i$) ou $a = -3$ (racine commune 1).

Correction de l'exercice 14 - Un degré 5 avec racines doubles

- **a) Calcul** : $32 - 2 \times 16 + 2 \times 8 - 4 \times 4 + 2 - 2$ ✓
- **Détail** : $32 - 32 + 16 - 16 + 2 - 2$ ✓
- **Résultat** : 0 ✓
- **Conclusion** : 2 est racine ✓
- **b) Factorisation** : $P(z) = (z - 2)(z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e)$ ✓
- **Terme constant** : $-2e = -2$, donc $e = 1$ ✓
- **Terme en z^4** : $b - 2 = -2$, donc $b = 0$ ✓
- **Terme en z^3** : $c - 2b = 2$, donc $c = 2$ ✓
- **Terme en z^2** : $d - 2c = -4$, donc $d = 0$ ✓

- **Vérification sur le terme en z** : $e - 2d = 1$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Quotient obtenu** : $z^4 + 2z^2 + 1$ ✓
- **Reconnaissance** : c'est $(z^2 + 1)^2$ ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + 1)^2 = (z - 2)(z - i)^2(z + i)^2$$

- **Vérification par développement** : $(z - 2)(z^4 + 2z^2 + 1) = z^5 + 2z^3 + z - 2z^4 - 4z^2 - 2$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve P ✓
- **Racines** : 2 (simple), i (double), $-i$ (double) ✓
- **Comptage** : $1 + 2 + 2 = 5$, conforme au degré ✓
- **Contrôle par la somme** : $2 + i + i - i - i = 2$, et $-\frac{b}{a} = 2$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $2 \times i^2 \times (-i)^2 = 2 \times (-1) \times (-1) = 2$ ✓
- **Relation en degré impair** : le produit vaut $-\frac{\text{terme constant}}{a} = 2$ ✓
- **Vérification de la multiplicité** : $P'(i) = 0$ également, puisque i est racine double ✓

Réponse. a) $P(2) = 0$ · b) $P(z) = (z - 2)(z^2 + 1)^2$: racines 2 (simple), i et $-i$ (doubles).

Correction de l'exercice 15 - Deux modes d'un système vibrant

- **a) Changement d'inconnue** : $R = r^2$ ✓
- **Équation** : $R^2 + 5R + 4 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $25 - 16 = 9$ ✓
- **Solutions en R** : $\frac{-5 \pm 3}{2}$, soit $R = -1$ ou $R = -4$ ✓
- **Les deux sont négatives** : les quatre racines seront imaginaires pures ✓
- **Premier cas** : $r^2 = -1$, donc $r = \pm i$ ✓
- **Second cas** : $r^2 = -4$, donc $r = \pm 2i$ ✓
- **Solutions** :

$$S = \{i; -i; 2i; -2i\}$$

- **b) Première pulsation** : $\omega_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ✓
- **Seconde pulsation** : $\omega_2 = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ✓
- **Période du premier mode** : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi$ ✓
- **Valeur approchée** : 6,283 s ✓
- **Période du second mode** : $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \pi \approx 3,142 \text{ s}$ ✓
- **Observation** : aucune partie réelle, donc **aucun amortissement** ✓
- **Conséquence** : les oscillations ne décroissent jamais dans ce modèle idéalisé ✓
- **c) Condition** : il faut un temps T multiple **des deux** périodes ✓
- **Recherche** : $T = k_1 \times 2\pi = k_2 \times \pi$ ✓
- **Rapport** : $\frac{T_1}{T_2} = 2$, un nombre **entier** ✓
- **Conséquence** : T_1 est déjà un multiple de T_2 ✓
- **Période commune** :

$$T = 2\pi \approx 6,283 \text{ s}$$

- **Vérification** : en 2π , le premier mode fait 1 oscillation, le second en fait 2 ✓
- **Cohérence** : les deux reviennent simultanément à leur état initial ✓
- **Remarque importante** : si le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ était **irrationnel**, aucune période commune n'existerait ✓
- **Vocabulaire** : le mouvement serait alors dit **quasi-périodique** ✓

Réponse. a) $S = \{\pm i; \pm 2i\}$ · b) $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $T_1 = 2\pi \approx 6,283 \text{ s}$ et $T_2 = \pi \approx 3,142 \text{ s}$ · c) au bout de $2\pi \approx 6,283 \text{ s}$.