Plaquette 4 – Degré 4 et au-delà : changements d'inconnue et équations z^n = a

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation bicarrée $az^4 + bz^2 + c = 0$**.** On pose $Z = z^2$, on résout $aZ^2 + bZ + c = 0$, puis pour **chaque** valeur de Z on résout $z^2 = Z$ — ce qui donne deux racines complexes opposées, même si Z est négatif ou complexe.

Équation en z^{2n} **ou** z^{3n}**.** Même principe avec $Z = z^3$, $Z = z^n$: le degré est divisé, puis on extrait des racines n-ièmes.

Équation réciproque $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ (coefficients palindromes). Comme 0 n'est pas solution, on divise par z^2 et on pose

$$u = z + \frac{1}{z} \qquad \text{avec} \qquad z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$$

L'équation devient du second degré en u ; on revient ensuite à z par $z^2 - uz + 1 = 0$.

Équation $z^n = a$**.** Avec $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ et $\rho > 0$, les n solutions sont

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\;\mathrm{e}^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \qquad 0 \leq k \leq n-1$$

Identité de Sophie Germain. Elle factorise ce qui semble irréductible :

$$z^4 + 4 = \left(z^2 + 2\right)^2 - (2z)^2 = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

Translation d'inconnue. Une équation en $(z - \alpha)^n$ se résout en posant $w = z - \alpha$: on résout $w^n = a$, puis $z = w + \alpha$.

Multiplicité. Un facteur $\left(z^2 + 1\right)^2$ signifie que i et $-i$ sont racines **doubles** : elles comptent chacune pour deux dans le total des n racines.

Correction de l'exercice 1 – Bicarrée à solutions réelles

On pose $Z = z^2$: l'équation devient $Z^2 - 5Z + 4 = 0$, de discriminant 9, de solutions $Z = \dfrac{5 \pm 3}{2}$, soit 4 et 1. Alors $z^2 = 4$ donne $z = \pm 2$, et $z^2 = 1$ donne $z = \pm 1$:

$$z^4 - 5z^2 + 4 = (z^2 - 1)(z^2 - 4) = (z - 1)(z + 1)(z - 2)(z + 2)$$

Les quatre solutions -2, -1, 1, 2 sont réelles : ici, ℂ n'apporte rien. **Contrôle** : leur somme est nulle (pas de terme en z^3) et leur produit vaut 4, le terme constant.

Réponse. $S = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$.

Correction de l'exercice 2 – Bicarrée à solutions imaginaires pures

Avec $Z = z^2$: $Z^2 + 5Z + 6 = 0$ a pour solutions $Z = \dfrac{-5 \pm 1}{2}$, soit -2 et -3, toutes deux négatives. Il n'y a donc aucune solution réelle, mais $-2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$ et $-3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$:

$$z = \pm i\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad z = \pm i\sqrt{3}$$

Les quatre images sont sur l'axe des imaginaires purs. **Contrôle** pour $z = i\sqrt{2}$: $z^4 + 5z^2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. Conclure « pas de solution » parce que $Z < 0$ serait

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

raisonner dans $\mathbb{R}$.

Réponse. $S = \left\{\pm i\sqrt{2}\,;\pm i\sqrt{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 3 – Deux chemins pour la même équation

Par factorisation : $z^4 - 16 = (z^2-4)(z^2+4)$, différence de deux carrés, et les deux facteurs donnent $z = \pm 2$ et $z = \pm 2i$.

Par la forme exponentielle : $16 = 16\,\mathrm{e}^{i0}$, et $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ convient si $r^4 = 16$ et $4\theta = 2k\pi$, soit

$$r = 2 \qquad \theta = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

ce qui redonne 2, $2i$, -2, $-2i$. La factorisation est plus rapide ici, parce que $16 = 2^4$; la forme exponentielle s'applique à tout second membre (par exemple $z^4 = 5$, dont les solutions sont $\pm\sqrt[4]{5}$ et $\pm i\sqrt[4]{5}$). Les quatre images forment un carré.

Réponse. $S = \{\pm 2\,;\pm 2i\}$; la factorisation est plus rapide ici, l'exponentielle est la méthode générale.

Correction de l'exercice 4 – L'identité de Sophie Germain

a) On fait apparaître un carré : $z^4 + 4 = z^4 + 4z^2 + 4 - 4z^2 = (z^2+2)^2 - (2z)^2$, puis la différence de deux carrés donne

$$z^4 + 4 = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$$

Contrôle en $z = 3$: $81 + 4 = 85 = 5 \times 17$.

b) Chaque trinôme a pour discriminant -4 : le premier a pour racines $1 \pm i$, le second $-1 \pm i$. Les solutions sont $\pm 1 \pm i$.

c) $-4 = 4\,\mathrm{e}^{i\pi}$, donc $r^4 = 4$ et $4\theta = \pi + 2k\pi$: $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. La première solution, $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$, donne les autres par multiplications successives par i. Les quatre points forment un carré de côté 2 centré en O.

Réponse. b) et c) $S = \{\pm 1 \pm i\}$, les quatre sommets d'un carré de côté 2 centré en O.

Correction de l'exercice 5 – Une équation en z³

On pose $Z = z^3$: $Z^2 - 7Z - 8 = 0$ a pour discriminant 81 et pour solutions $Z = 8$ et $Z = -1$.

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{3}} \qquad z^3 = -1 \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

La première équation donne 2 et $-1 \pm i\sqrt{3}$, la seconde -1 et $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$: six solutions pour une équation de degré 6, trois sur le cercle de rayon 2 et trois sur le cercle unité. **Contrôle** : pour $z = -1$, $1 + 7 - 8 = 0$; pour $z = 2$, $64 - 56 - 8 = 0$.

Réponse. $S = \left\{2\,;-1+i\sqrt{3}\,;-1-i\sqrt{3}\,;-1\,;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 6 – Racines cinquièmes

$32 = 32\,\mathrm{e}^{i0}$; avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, on obtient $r^5 = 32$, soit $r = 2$, et $5\theta = 2k\pi$:

$$z_k = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$$

Une solution est réelle si son argument vaut 0 ou π modulo 2π : seul $k = 0$ convient ($\frac{2k}{5} = 1$ donnerait $k = \frac{5}{2}$). La seule solution réelle est 2 ; les quatre autres forment deux paires conjuguées, puisque $z^5 - 32$ est à coefficients réels. **Contrôle** : $z_1 \approx 0{,}618 + 1{,}902i$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a bien pour module environ 2.

Réponse. $z_k = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$ pour k de 0 à 4 ; une seule est réelle, $z = 2$.

Correction de l'exercice 7 – Racines quatrièmes d'un complexe

On met le second membre sous forme exponentielle : son module vaut $\sqrt{64+192} = 16$, et $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donnent $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$: $r^4 = 16$ et $4\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, donc

$$z_k = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)} \qquad 0 \le k \le 3$$

soit $\sqrt{3} + i$, puis, en multipliant par i, $-1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} - i$ et $1 - i\sqrt{3}$. **Vérification** : $\left(\sqrt{3}+i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $\left(2 + 2i\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 8i\sqrt{3} - 12 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Réponse. $S = \left\langle \sqrt{3}+i\,;\,-1+i\sqrt{3}\,;\,-\sqrt{3}-i\,;\,1-i\sqrt{3}\right\rangle$, soit $2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}$.

Correction de l'exercice 8 – Une réciproque avec racine double

0 n'est pas racine ($P(0) = 1$), donc $P(z) = 0$ équivaut à $\dfrac{P(z)}{z^2} = 0$. En regroupant les termes symétriques,

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 6 = u^2 + 2u - 8$$

car $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = u^2 - 2$. Les solutions de $u^2 + 2u - 8 = 0$ sont $u = 2$ et $u = -4$. L'équation $z + \dfrac{1}{z} = 2$ s'écrit $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$: 1 est racine double. L'équation $z + \dfrac{1}{z} = -4$ s'écrit $z^2 + 4z + 1 = 0$, de solutions $-2 \pm \sqrt{3}$. Au total, $2 + 1 + 1 = 4$ racines comptées avec multiplicité. **Contrôle** : $P(1) = 1 + 2 - 6 + 2 + 1 = 0$, et $\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(-2-\sqrt{3}\right) = 1$: les racines vont par paires d'inverses, et 1 est son propre inverse.

Réponse. 1 (racine double), $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$ (racines simples).

Correction de l'exercice 9 – Translation d'inconnue

On pose $w = z - 1$: l'équation devient $w^4 = 16$, de solutions $w = 2,\ 2i,\ -2,\ -2i$. On revient à $z = w + 1$:

$$S = \{3\,;\,1+2i\,;\,-1\,;\,1-2i\}$$

Vérification : $(3-1)^4 = 16$ et $((1+2i)-1)^4 = (2i)^4 = 16$. Les images sont celles des racines de $w^4 = 16$ translatées de 1 : les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre $\Omega(1\,;0)$ et de rayon 2, de côté $|3-(1+2i)| = |2-2i| = 2\sqrt{2}$.

Réponse. $S = \{3\,;\,1+2i\,;\,-1\,;\,1-2i\}$: un carré de côté $2\sqrt{2}$ inscrit dans le cercle de centre $\Omega(1\,;0)$ et de rayon 2.

Correction de l'exercice 10 – Une équation avec conjugué

On passe aux modules : $|z|^4 = |\overline{z}| = |z|$, d'où $|z|\left(|z|^3 - 1\right) = 0$, soit $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Si $z = 0$, l'équation est vérifiée. Si $|z| = 1$, alors $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, et l'équation devient $z^4 = \dfrac{1}{z}$, c'est-à-dire

$$z^5 = 1$$

dont les solutions sont les cinq racines cinquièmes de l'unité, $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$, toutes de module 1. Il y a donc six solutions : 0 et ces cinq nombres. **Contrôle** pour $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$z^4 = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{z}$. L'équation n'est pas polynomiale en z : son « degré » 4 ne limite pas le nombre de solutions.

Réponse. $S = \{0\}$ réuni aux cinq racines cinquièmes de l'unité : **six** solutions.

Correction de l'exercice 11 – Une bicarrée à paramètre

a) i est solution si et seulement si $i^4 - (m+2)i^2 + 2m = 0$, soit $1 + m + 2 + 2m = 0$, c'est-à-dire $m = -1$.

b) L'équation devient $z^4 - z^2 - 2 = 0$. Avec $Z = z^2$: $Z^2 - Z - 2 = 0$, de solutions $Z = 2$ et $Z = -1$, donc

$$z^4 - z^2 - 2 = (z^2 - 2)(z^2 + 1) = \left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)(z - i)(z + i)$$

Les solutions sont $\pm\sqrt{2}$ et $\pm i$; on retrouve bien i. **Contrôle** : la somme des racines est nulle et leur produit vaut -2, le terme constant.

Réponse. a) $m = -1$ · b) $S = \left\{\pm\sqrt{2}\,;\pm i\right\}$.

Correction de l'exercice 12 – Un système somme-produit

z et w sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 4$ et $P = 13$, soit $X^2 - 4X + 13 = 0$, de discriminant -36 :

$$X = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Le système étant symétrique, il a deux couples de solutions : $(2+3i\,;2-3i)$ et $(2-3i\,;2+3i)$. Dans les deux cas, $|z| = |w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. **Contrôle** : $|z| \times |w| = 13 = |zw|$. Dans $\mathbb{R}$, le système n'aurait pas de solution : deux réels de somme 4 ont un produit au plus égal à 4.

Réponse. $\{z\,;w\} = \{2+3i\,;2-3i\}$, avec $|z| = |w| = \sqrt{13}$.

Correction de l'exercice 13 – Une racine commune

Si z_0 est racine commune, $P(z_0) - Q(z_0) = 0$. Les termes en z^2 s'éliminent dans la différence :

$$P(z) - Q(z) = (a-2)z + 2 - a = (a-2)(z-1)$$

Donc $a = 2$ ou $z_0 = 1$. Si $a = 2$, les deux polynômes sont identiques, égaux à $z^2 + 2z + 2$, et ont leurs deux racines $-1 \pm i$ en commun. Si $z_0 = 1$, il faut $P(1) = 3 + a = 0$, soit $a = -3$; alors $P(z) = (z-1)(z-2)$ et $Q(z) = (z-1)(z+3)$ ont bien la racine commune 1. La condition trouvée étant nécessaire, on a vérifié qu'elle est suffisante : $a = 2$ ou $a = -3$.

Réponse. $a = 2$ (les deux polynômes sont alors identiques, de racines $-1 \pm i$) ou $a = -3$ (racine commune 1).

Correction de l'exercice 14 – Un degré 5 avec racines doubles

a) $P(2) = 32 - 32 + 16 - 16 + 2 - 2 = 0$.

b) On écrit $P(z) = (z-2)(z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e)$ et l'on identifie de proche en proche : $-2e = -2$ donne $e = 1$, puis $b - 2 = -2$ donne $b = 0$, $c - 2b = 2$ donne $c = 2$, $d - 2c = -4$ donne $d = 0$, et le terme en z, $e - 2d = 1$, concorde. Le quotient $z^4 + 2z^2 + 1$ est le carré $(z^2+1)^2$:

$$P(z) = (z-2)\left(z^2+1\right)^2 = (z-2)(z-i)^2(z+i)^2$$

2 est racine simple, i et $-i$ sont racines doubles : $1 + 2 + 2 = 5$ racines comptées avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

multiplicité. **Contrôle** : la somme $2 + 2i - 2i = 2$ est bien l'opposé du coefficient de z^4.

Réponse. a) $P(2) = 0$ · b) $P(z) = (z-2)\left(z^2+1\right)^2$: racines 2 (simple), i et $-i$ (doubles).

Correction de l'exercice 15 – Deux modes d'un système vibrant

a) Avec $R = r^2$: $R^2 + 5R + 4 = 0$ a pour solutions $R = -1$ et $R = -4$, toutes deux négatives. Donc $r^2 = -1$ ou $r^2 = -4$:

$$r = \pm i \qquad \text{ou} \qquad r = \pm 2i$$

b) Les pulsations propres sont $\omega_1 = 1$ rad/s et $\omega_2 = 2$ rad/s, de périodes $T_1 = 2\pi \approx 6{,}283$ s et $T_2 = \pi \approx 3{,}142$ s. Les racines n'ont pas de partie réelle : il n'y a pas d'amortissement dans ce modèle idéalisé.

c) La configuration se reproduit au bout d'un temps multiple des deux périodes. Comme $T_1 = 2T_2$, le plus petit est $T = 2\pi \approx 6{,}283$ s : le premier mode fait une oscillation, le second deux. Si le rapport des pulsations était irrationnel, aucune période commune n'existerait (mouvement quasi-périodique).

Réponse. a) $S = \{\pm i\,;\pm 2i\}$ · b) $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 2$ rad · s^{-1}, soit $T_1 = 2\pi \approx 6{,}283$ s et $T_2 = \pi \approx 3{,}142$ s · c) au bout de $2\pi \approx 6{,}283$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).