

Plaque 2 - Second degré : discriminant, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients RÉELS, $a \neq 0$. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$:

signe de Δ	solutions dans $\mathbb{C}$
$\Delta > 0$	deux réelles : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	une racine double : $-\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	deux conjuguées : $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

△ Dans le troisième cas, c'est bien $\sqrt{-\Delta}$ qui apparaît — un nombre **positif** — multiplié par i .

Factorisation. Dans tous les cas :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Relations coefficients-racines. Elles servent de vérification systématique :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Réciproquement, deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

Racines conjuguées. Si P est un polynôme à coefficients **réels** et si z_0 est racine de P , alors $\bar{z}_0$ l'est aussi. Conséquence pratique : une racine non réelle en offre une seconde gratuitement.

Coefficients complexes. La formule $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ reste valable, où δ est **une** racine carrée complexe de Δ — on la détermine par la méthode algébrique (système sur $x^2 - y^2$, $2xy$ et $x^2 + y^2$). Il n'y a alors plus aucune discussion de signe, et les racines ne sont **pas** conjuguées en général.

Correction de l'exercice 1 - Discriminant négatif, cas de base

- **Repérage** : $a = 1, b = 1, c = 1$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$ ✓
- **Calcul** : $1 - 4 = -3$ ✓
- **Signe** : $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes conjuguées ✓
- **Formule du cours** :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{3}$ ✓

— **Application** : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

— **Contrôle par la somme** : $\frac{-1-1}{2} = -1$, et $-\frac{b}{a} = -1$ ✓

— **Contrôle par le produit** : $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, et $\frac{c}{a} = 1$ ✓

— **Vérification directe** : pour $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z^2 = \frac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{4}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Somme complète** : $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$ ✓

— **À connaître** : ces deux nombres sont les racines cubiques de l'unité autres que 1 ✓

— **Notation classique** : on les note j et $\bar{j} = j^2$ ✓

— **Propriété** : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$ ✓

Réponse. $S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 2 - Des racines à parties entières

— **Repérage** : $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$ ✓

— **Discriminant** : $\Delta = 4 - 20$ ✓

— **Valeur** : -16 ✓

— **Racine de l'opposé** : $\sqrt{16} = 4$ ✓

— **Formule** : $z = \frac{2 \pm 4i}{2}$ ✓

— **Simplification** : on divise **chaque** terme par 2 ✓

— **Solutions** :

$$z_1 = 1 - 2i \quad z_2 = 1 + 2i$$

— **Erreur à éviter** : simplifier $\frac{2+4i}{2}$ en $2+2i$ — le 2 du numérateur doit aussi être divisé ✓

— **Contrôle par la somme** : $1 - 2i + 1 + 2i = 2$, et $-\frac{b}{a} = 2$ ✓

— **Contrôle par le produit** : $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$ ✓

— **Cohérence** : $\frac{c}{a} = 5$ ✓

— **Vérification directe** : $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ ✓

— **Calcul complet** : $-3 + 4i - 2(1 + 2i) + 5 = -3 + 4i - 2 - 4i + 5 = 0$ ✓

— **Lecture géométrique** : les deux images sont symétriques par rapport à l'axe des réels ✓

— **Module commun** : $|1 + 2i| = \sqrt{5}$ ✓

— **Lien** : $|z_1| \times |z_2| = 5$, ce qui est bien le produit des racines ✓

Réponse. $S = \{1 - 2i; 1 + 2i\}$.

Correction de l'exercice 3 - Quand a n'est pas égal à 1

- **Repérage** : $a = 3, b = -2, c = 1$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1$ ✓
- **Calcul** : $4 - 12 = -8$ ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Formule** : $z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2 \times 3}$ ✓
- **Dénominateur** : 6 ✓
- **Simplification par 2** :

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

- **Solutions** : $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ et $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $\frac{2}{3}$, et $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Cohérence** : $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Piège du $2a$** : diviser par 2 au lieu de 6 donnerait $1 \pm i\sqrt{2}$ ✓
- **Test de cette fausse solution** : $3(1 + i\sqrt{2})^2 = 3(1 + 2i\sqrt{2} - 2) = -3 + 6i\sqrt{2}$ ✓
- **Suite du calcul** : $-3 + 6i\sqrt{2} - 2 - 2i\sqrt{2} + 1 = -4 + 4i\sqrt{2} \neq 0$ ✓
- **Conclusion** : la vérification détecte bien l'erreur ✓
- **Valeur approchée des solutions** : $0,333 \pm 0,471i$ ✓

Réponse. $S = \left\{ \frac{1 - i\sqrt{2}}{3}; \frac{1 + i\sqrt{2}}{3} \right\}$.

Correction de l'exercice 4 - Équations sans terme en z

- **Méthode** : inutile de passer par le discriminant, on isole z^2 ✓
- **Première équation** : $z^2 = -4$ ✓
- **Écriture utile** : $-4 = (2i)^2$ ✓
- **Justification** : $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ ✓
- **Solutions** : $z = 2i$ ou $z = -2i$ ✓
- **Deuxième équation** : $z^2 = -7$ ✓
- **Écriture** : $-7 = (i\sqrt{7})^2$ ✓
- **Solutions** :

$$z = i\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{7}$$

- **Valeur approchée** : $\pm 2,646i$ ✓
- **Troisième équation** : $4z^2 = -9$ ✓
- **On isole** : $z^2 = -\frac{9}{4}$ ✓
- **Écriture** : $-\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}i\right)^2$ ✓
- **Solutions** : $z = \pm \frac{3}{2}i$ ✓
- **Contrôle** : $4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 9 = -9 + 9 = 0$ ✓

- **Par le discriminant, pour comparer** : pour $z^2 + 4$, $\Delta = 0 - 16 = -16$ ✓
 - **Formule** : $\frac{0 \pm 4i}{2} = \pm 2i$ ✓
 - **Cohérence** : même résultat, mais par un chemin plus long ✓
 - **À retenir** : $z^2 = -k$ avec $k > 0$ donne toujours $z = \pm i\sqrt{k}$ ✓
- Réponse.** $z = \pm 2i \cdot z = \pm i\sqrt{7} \cdot z = \pm \frac{3}{2}i$.

Correction de l'exercice 5 - Un coefficient irrationnel

- **Repérage** : $a = 1$, $b = -2\sqrt{3}$, $c = 4$ ✓
 - **Discriminant** : $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 16$ ✓
 - **Carré** : $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ ✓
 - **Calcul** : $12 - 16 = -4$ ✓
 - **Racine de l'opposé** : 2 ✓
 - **Formule** : $z = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2}$ ✓
 - **Simplification** :

$$z_1 = \sqrt{3} - i \quad z_2 = \sqrt{3} + i$$
 - **Module de z_2** : $\sqrt{3+1} = 2$ ✓
 - **Argument** : $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ✓
 - **Angle** : $\frac{\pi}{6}$ ✓
 - **Forme exponentielle** : $z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$ ✓
 - **Pour z_1** : c'est le conjugué, donc $2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ✓
 - **Contrôle par la somme** : $2\sqrt{3}$, et $-\frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$ ✓
 - **Contrôle par le produit** : $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ ✓
 - **Cohérence** : $\frac{c}{a} = 4$ ✓
 - **Contrôle par les modules** : $|z_1| \times |z_2| = 4$ ✓
 - **Contrôle par les arguments** : $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$, le produit est bien un réel positif ✓
- Réponse.** $S = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}$, soit $2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $2 e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Correction de l'exercice 6 - Racine double et discriminant positif

- **Première équation** : $\Delta = 36 - 36 = 0$ ✓
- **Conclusion** : une racine double ✓
- **Valeur** : $z = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ ✓
- **Écriture** :

$$S = \{3\}$$
- **Forme factorisée** : $z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2$ ✓
- **Reconnaissance** : c'est l'identité remarquable $(z - 3)^2$ ✓
- **Seconde équation** : $\Delta = 25 - 24 = 1$ ✓
- **Signe** : $\Delta > 0$, deux racines réelles ✓
- **Racine du discriminant** : 1 ✓

— **Solutions** : $\frac{5 \pm 1}{2}$ ✓

— **Valeurs** :

$$S = \{2; 3\}$$

— **Contrôle** : $2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$ ✓

— **Constat demandé** : dans ces deux cas, $\mathbb{C}$ n'apporte **aucune** solution supplémentaire ✓

— **Explication** : les solutions réelles sont déjà des complexes ✓

— **Où $\mathbb{C}$ change tout** : uniquement lorsque $\Delta < 0$ ✓

— **Résumé du chapitre** : dans $\mathbb{C}$, un trinôme a **toujours** deux racines, distinctes ou confondues ✓

— **Nom de ce résultat** : c'est un cas particulier du théorème de d'Alembert-Gauss ✓

— **Portée** : tout polynôme de degré n à coefficients complexes a exactement n racines comptées avec leur multiplicité ✓

Réponse. $z^2 - 6z + 9 = 0$: racine double 3 · $z^2 - 5z + 6 = 0$: $S = \{2; 3\}$. $\mathbb{C}$ n'ajoute des solutions que lorsque $\Delta < 0$.

Correction de l'exercice 7 - Factoriser un trinôme dans $\mathbb{C}$

— **Discriminant** : $\Delta = 4 - 20 = -16$ ✓

— **Racine de l'opposé** : 4 ✓

— **Racines** : $\frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ ✓

— **Forme factorisée du cours** : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$ avec $a = 1$ ✓

— **Substitution** : $z_1 = -1 - 2i$ et $z_2 = -1 + 2i$ ✓

— **Factorisation** :

$$P(z) = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$$

— **Vérification, astuce** : on reconnaît $(A + B)(A - B)$ avec $A = z + 1$ et $B = 2i$ ✓

— **Produit** : $A^2 - B^2$ ✓

— **Calcul de A^2** : $(z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1$ ✓

— **Calcul de B^2** : $(2i)^2 = -4$ ✓

— **Différence** : $z^2 + 2z + 1 + 4$ ✓

— **Résultat** : $z^2 + 2z + 5$ ✓

— **Cohérence** : on retrouve bien P ✓

— **Remarque** : cette factorisation est **impossible dans $\mathbb{R}$** ✓

— **Justification** : P n'a pas de racine réelle, il reste irréductible sur $\mathbb{R}$ ✓

— **Lien avec le cours de Première** : $P(z) = (z + 1)^2 + 4$ est la forme canonique ✓

— **Conséquence** : $P(x) \geq 4$ pour tout réel x , d'où l'absence de racine réelle ✓

Réponse. $P(z) = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$.

Correction de l'exercice 8 - Reconstruire l'équation

— **Outil** : deux nombres de somme S et de produit P sont racines de $z^2 - Sz + P = 0$ ✓

— **a) Somme** : $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ ✓

— **Produit** : $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$ ✓

— **Justification** : c'est $a^2 + b^2$ avec $a = 2$ et $b = 3$ ✓

— **Équation** :

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

- **Vérification** : $\Delta = 16 - 52 = -36$ ✓
- **Racines** : $\frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Coefficients** : 1, -4, 13 sont bien réels ✓
- **Pourquoi** : les deux racines sont conjuguées, leur somme et leur produit sont donc réels ✓
- **b) Somme** : $i + (-2i) = -i$ ✓
- **Produit** : $i \times (-2i) = -2i^2 = 2$ ✓
- **Équation** :

$$z^2 + iz + 2 = 0$$

- **Coefficients** : 1, i , 2 — le coefficient de z n'est **pas** réel ✓
- **Explication** : i et $-2i$ ne sont pas conjugués l'un de l'autre ✓
- **Conséquence** : aucune équation à coefficients réels ne peut les avoir pour seules racines ✓
- **Vérification** : $i^2 + i \times i + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ ✓
- **Seconde vérification** : $(-2i)^2 + i(-2i) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$ ✓
- **Principe général** : à coefficients réels, les racines non réelles vont **par paires conjuguées** ✓

Réponse. a) $z^2 - 4z + 13 = 0$ · b) $z^2 + iz + 2 = 0$, à coefficients non réels car i et $-2i$ ne sont pas conjugués.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver les coefficients

- **Propriété clé** : les coefficients sont réels, donc $\overline{1-i} = 1+i$ est aussi racine ✓
- **L'autre racine est donc** : $1+i$ ✓
- **Somme des racines** : $(1-i) + (1+i) = 2$ ✓
- **Relation** : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ avec $a = 1$ comme coefficient dominant ✓
- **Attention aux notations** : ici le coefficient de z s'appelle a ✓
- **Donc** : $-a = 2$, soit $a = -2$ ✓
- **Produit des racines** : $(1-i)(1+i) = 1 + 1 = 2$ ✓
- **Relation** : le produit vaut le terme constant, donc $b = 2$ ✓
- **Polynôme obtenu** :

$$P(z) = z^2 - 2z + 2$$

- **Vérification** : $\Delta = 4 - 8 = -4$ ✓
- **Racines** : $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Méthode alternative, par substitution** : $P(1-i) = 0$ ✓
- **Calcul de $(1-i)^2$** : $1 - 2i - 1 = -2i$ ✓
- **Équation** : $-2i + a(1-i) + b = 0$ ✓
- **Regroupement** : $(a+b) + (-2-a)i = 0$ ✓
- **Partie imaginaire nulle** : $a = -2$ ✓
- **Partie réelle nulle** : $b = -a = 2$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent le même résultat ✓

Réponse. $a = -2$ et $b = 2$, soit $P(z) = z^2 - 2z + 2$; l'autre racine est $1+i$.

Correction de l'exercice 10 - Une racine imaginaire pure en degré 3

- **a) Calcul de $(3i)^2$** : $9i^2 = -9$ ✓
- **Calcul de $(3i)^3$** : $27i^3 = -27i$ ✓
- **Substitution** : $-27i - 2 \times (-9) + 9 \times 3i - 18$ ✓
- **Détail** : $-27i + 18 + 27i - 18$ ✓
- **Résultat** : 0 ✓
- **Conclusion** : $3i$ est bien racine de P ✓
- **b) Argument** : les coefficients 1, -2 , 9, -18 sont **réels** ✓
- **Propriété** : le conjugué d'une racine est racine ✓
- **Autre racine** : $\overline{3i} = -3i$ ✓
- **c) Deux racines connues** : P est donc divisible par $(z - 3i)(z + 3i)$ ✓
- **Produit** : $z^2 - (3i)^2 = z^2 + 9$ ✓
- **Forme cherchée** : $P(z) = (z^2 + 9)(z - \alpha)$ ✓
- **Justification du degré** : le quotient est de degré 1 ✓
- **Identification du terme constant** : $9 \times (-\alpha) = -18$ ✓
- **Donc** : $\alpha = 2$ ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z^2 + 9)(z - 2) = (z - 3i)(z + 3i)(z - 2)$$

- **Vérification par développement** : $(z^2 + 9)(z - 2) = z^3 - 2z^2 + 9z - 18$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve P ✓
- **Solutions** :

$$S = \{2; 3i; -3i\}$$

- **Contrôle par la somme** : $2 + 3i - 3i = 2$, et $-\frac{-2}{1} = 2$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $2 \times 3i \times (-3i) = 2 \times 9 = 18$ ✓
- **Relation en degré 3** : le produit vaut $-\frac{\text{terme constant}}{a} = 18$ ✓

Réponse. a) $P(3i) = 0$ · b) $-3i$, car les coefficients sont réels · c) $P(z) = (z - 2)(z^2 + 9)$ et $S = \{2; 3i; -3i\}$.

Correction de l'exercice 11 - Second degré à coefficients complexes

- **Avertissement** : les coefficients ne sont pas réels, il n'y a plus de discussion de signe ✓
- **Repérage** : $a = 1$, $b = -(5 + i)$, $c = 8 + i$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = (5 + i)^2 - 4(8 + i)$ ✓
- **Carré** : $(5 + i)^2 = 25 + 10i - 1 = 24 + 10i$ ✓
- **Second terme** : $32 + 4i$ ✓
- **Différence** : $24 + 10i - 32 - 4i$ ✓
- **Discriminant** :

$$\Delta = -8 + 6i$$

- **Racine carrée de Δ** : on pose $\delta = x + iy$ ✓
- **Parties réelles** : $x^2 - y^2 = -8$ ✓
- **Parties imaginaires** : $2xy = 6$, donc $xy = 3$ ✓
- **Modules** : $|\Delta| = \sqrt{64 + 36} = 10$, donc $x^2 + y^2 = 10$ ✓

- **Somme des deux équations en carrés** : $2x^2 = 2$, donc $x^2 = 1$ ✓
 - **Différence** : $2y^2 = 18$, donc $y^2 = 9$ ✓
 - **Signes** : $xy = 3 > 0$, donc x et y de même signe ✓
 - **Une racine carrée** : $\delta = 1 + 3i$ ✓
 - **Vérification** : $(1 + 3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$ ✓
 - **Formule des solutions** : $z = \frac{(5 + i) \pm (1 + 3i)}{2}$ ✓
 - **Première** : $\frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$ ✓
 - **Seconde** : $\frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$ ✓
 - **Ensemble des solutions** :

$$S = \{3 + 2i; 2 - i\}$$
 - **Contrôle par la somme** : $3 + 2i + 2 - i = 5 + i$ ✓
 - **Contrôle par le produit** : $(3 + 2i)(2 - i) = 6 - 3i + 4i + 2 = 8 + i$ ✓
 - **Observation** : les deux racines ne sont pas conjuguées, ce qui est normal ici ✓
- Réponse.** $\Delta = -8 + 6i$, $\delta = 1 + 3i$, et $S = \{3 + 2i; 2 - i\}$.

Correction de l'exercice 12 - Discussion selon un paramètre

- **a) Discriminant** : $\Delta = m^2 - 4$ ✓
 - **Condition** : les solutions sont non réelles si et seulement si $\Delta < 0$ ✓
 - **Inéquation** : $m^2 - 4 < 0$ ✓
 - **Factorisation** : $(m - 2)(m + 2) < 0$ ✓
 - **Tableau de signes** : le produit est négatif entre les racines ✓
 - **Résultat** :

$$-2 < m < 2$$
 - **Cas limites** : $m = 2$ donne la racine double -1 , et $m = -2$ la racine double 1 ✓
 - **b) Relation à utiliser** : le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = 1$ ✓
 - **Écriture** : $z_1 z_2 = 1$ ✓
 - **Second argument** : les coefficients sont réels et $\Delta < 0$ ✓
 - **Conséquence** : $z_2 = \overline{z_1}$ ✓
 - **Substitution** : $z_1 \overline{z_1} = 1$ ✓
 - **Or** : $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$ ✓
 - **Donc** : $|z_1|^2 = 1$ ✓
 - **Module** : un module est positif, donc

$$|z_1| = |z_2| = 1$$
 - **Interprétation** : les images sont sur le **cercle unité**, quel que soit m dans $] -2; 2[$ ✓
 - **Contrôle avec** $m = 1$: $\Delta = -3$, racines $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓
 - **Module** : $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ✓
 - **Contrôle avec** $m = 0$: racines $\pm i$, de module 1 ✓
 - **Cohérence** : conforme dans les deux cas ✓
 - **Complément** : l'argument θ vérifie $2 \cos \theta = -m$, il décrit tout $]0; \pi[$ ✓
- Réponse.** a) $-2 < m < 2$ · b) le produit des racines vaut 1 et elles sont conjuguées, donc $|z|^2 = 1$: les images sont sur le cercle unité.

Correction de l'exercice 13 - Somme et produit imposés

- **Outil** : deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2 - Sz + P = 0$ ✓
- **Équation** : $z^2 - 6z + 34 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = 36 - 136$ ✓
- **Valeur** : -100 ✓
- **Signe** : négatif, donc deux solutions conjuguées ✓
- **Racine de l'opposé** : 10 ✓
- **Formule** : $\frac{6 \pm 10i}{2}$ ✓
- **Solutions** :

$$z_1 = 3 - 5i \quad z_2 = 3 + 5i$$

- **Vérification de la somme** : $3 - 5i + 3 + 5i = 6$ ✓
- **Vérification du produit** : $(3 - 5i)(3 + 5i) = 9 + 25 = 34$ ✓
- **Cohérence** : les deux conditions sont remplies ✓
- **Remarque** : dans $\mathbb{R}$, ce problème n'aurait **aucune** solution ✓
- **Justification** : deux réels de somme 6 ont un produit au plus 9 ✓
- **Démonstration** : $xy = x(6 - x) = -x^2 + 6x$, maximal en $x = 3$ ✓
- **Valeur maximale** : 9, et $34 > 9$ ✓
- **Module des solutions** : $\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ ✓
- **Lien** : le produit des deux modules vaut 34, ce qui est bien P ✓

Réponse. $3 - 5i$ et $3 + 5i$ (racines de $z^2 - 6z + 34 = 0$).

Correction de l'exercice 14 - Une équation bicarrée

- **Changement d'inconnue** : on pose $Z = z^2$ ✓
- **Équation obtenue** : $Z^2 - 3Z - 4 = 0$ ✓
- **Discriminant** : $9 + 16 = 25$ ✓
- **Signe** : positif, deux solutions réelles ✓
- **Racine** : $\sqrt{25} = 5$ ✓
- **Solutions en Z** : $\frac{3 \pm 5}{2}$ ✓
- **Valeurs** : $Z = 4$ ou $Z = -1$ ✓
- **Premier cas** : $z^2 = 4$ ✓
- **Solutions** : $z = 2$ ou $z = -2$ ✓
- **Second cas** : $z^2 = -1$ ✓
- **Solutions** : $z = i$ ou $z = -i$ ✓
- **Ensemble complet** :

$$S = \{2; -2; i; -i\}$$

- **Contrôle du nombre de solutions** : l'équation est de degré 4, il y en a bien quatre ✓
- **Vérification pour $z = i$** : $i^4 = 1$ et $i^2 = -1$ ✓
- **Calcul** : $1 - 3 \times (-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$ ✓
- **Vérification pour $z = 2$** : $16 - 12 - 4 = 0$ ✓
- **Factorisation obtenue** : $z^4 - 3z^2 - 4 = (z^2 - 4)(z^2 + 1)$ ✓
- **Développement de contrôle** : $z^4 + z^2 - 4z^2 - 4 = z^4 - 3z^2 - 4$ ✓
- **Piège à éviter** : s'arrêter aux solutions réelles ± 2 — dans $\mathbb{C}$, $Z = -1$ fournit deux racines de plus ✓

Réponse. $S = \{2; -2; i; -i\}$.

Correction de l'exercice 15 - Oscillations amorties d'une suspension

— **a) Repérage** : $a = 1$, $b = 2\lambda = 2$, $c = \omega_0^2 = 25$ ✓

— **Équation** : $r^2 + 2r + 25 = 0$ ✓

— **Discriminant** : $\Delta = 4 - 100$ ✓

— **Valeur** : -96 ✓

— **Racine de l'opposé** : $\sqrt{96}$ ✓

— **Simplification** : $96 = 16 \times 6$, donc $\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ ✓

— **Formule** : $r = \frac{-2 \pm 4i\sqrt{6}}{2}$ ✓

— **Solutions** :

$$r = -1 - 2i\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad r = -1 + 2i\sqrt{6}$$

— **b) Pseudo-pulsation** : c'est la partie imaginaire positive ✓

— **Valeur exacte** : $\omega = 2\sqrt{6}$ ✓

— **Valeur approchée** : $4,899 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ✓

— **Comparaison** : $\omega < \omega_0 = 5$, l'amortissement ralentit l'oscillation ✓

— **Pseudo-période** : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{2\pi}{4,899}$ ✓

— **Résultat** :

$$T \approx 1,283 \text{ s}$$

— **Contrôle** : sans amortissement, $T_0 = \frac{2\pi}{5} \approx 1,257 \text{ s}$ ✓

— **Cohérence** : la pseudo-période est bien légèrement plus longue ✓

— **Partie réelle** : -1 , elle donne le facteur d'amortissement e^{-t} ✓

— **Interprétation** : l'amplitude est divisée par $e \approx 2,718$ chaque seconde ✓

— **c) Condition** : $\Delta < 0$, c'est-à-dire $4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$ ✓

— **Simplification** : $\lambda < \omega_0$ ✓

— **Si l'amortissement augmente** : pour $\lambda > \omega_0$, $\Delta > 0$ et les racines sont réelles négatives ✓

— **Conséquence physique** : le régime est **apériodique**, la masse revient à l'équilibre sans osciller ✓

— **Cas limite** : $\lambda = \omega_0$ donne une racine double, c'est le régime **critique**, le retour le plus rapide ✓

Réponse. a) $r = -1 \pm 2i\sqrt{6}$ · b) $\omega = 2\sqrt{6} \approx 4,899 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T \approx 1,283 \text{ s}$ · c) régime pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$; au-delà, le régime devient apériodique (retour sans oscillation).