Plaquette 2 – Second degré : discriminant, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résolution de $az^2+bz+c=0$ à coefficients RÉELS, $a\neq 0$. On calcule $\Delta=b^2-4ac$:

signe de Δ	solutions dans $\mathbb{C}$
$\Delta>0$	deux réelles : $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	une racine double : $-\dfrac{b}{2a}$
$\Delta<0$	deux conjuguées : $\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

⚠ Dans le troisième cas, c'est bien $\sqrt{-\Delta}$ qui apparaît — un nombre **positif** — multiplié par i.

Factorisation. Dans tous les cas :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

Relations coefficients-racines. Elles servent de vérification systématique :

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a}\qquad z_1z_2=\frac{c}{a}$$

Réciproquement, deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2-Sz+P=0$.

Racines conjuguées. Si P est un polynôme à coefficients **réels** et si z_0 est racine de P, alors $\overline{z_0}$ l'est aussi. Conséquence pratique : une racine non réelle en offre une seconde gratuitement.

Coefficients complexes. La formule $z=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$ reste valable, où δ est **une** racine carrée complexe de Δ — on la détermine par la méthode algébrique (système sur x^2-y^2, $2xy$ et x^2+y^2). Il n'y a alors plus aucune discussion de signe, et les racines ne sont **pas** conjuguées en général.

Correction de l'exercice 1 – Discriminant négatif, cas de base

Le discriminant vaut $\Delta=1-4=-3<0$: l'équation, à coefficients réels, a deux solutions complexes conjuguées,

$$z=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Contrôle par les relations entre coefficients et racines : la somme vaut $-1=-\dfrac{b}{a}$ et le produit $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1=\dfrac{c}{a}$. Ces deux nombres, notés j et $\bar{j}=j^2$, sont les racines cubiques de l'unité autres que 1 : $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.

Réponse. $S=\left\{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Des racines à parties entières

$\Delta = 4 - 20 = -16$, et $\sqrt{16} = 4$:

$$z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Il faut diviser **chaque** terme du numérateur par 2 : écrire $2 + 2i$ serait faux. **Contrôle** : la somme vaut $2 = -\frac{b}{a}$ et le produit $(1 - 2i)(1 + 2i) = 5 = \frac{c}{a}$. Les deux images sont symétriques par rapport à l'axe des réels, sur le cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Réponse. $S = \{1 - 2i\,;\, 1 + 2i\}$.

Correction de l'exercice 3 – Quand a n'est pas égal à 1

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8$, et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Le dénominateur est $2a = 6$:

$$z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{6} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

Contrôle : la somme vaut $\frac{2}{3} = -\frac{b}{a}$ et le produit $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$. Diviser par 2 au lieu de 6 donnerait $1 \pm i\sqrt{2}$, et la vérification le détecte :
$3\left(1 + i\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) + 1 = -4 + 4i\sqrt{2} \neq 0$.

Réponse. $S = \left\langle \frac{1 - i\sqrt{2}}{3}\,;\, \frac{1 + i\sqrt{2}}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 4 – Équations sans terme en z

Sans terme en z, inutile de calculer un discriminant : on isole z^2 et l'on utilise $-k = \left(i\sqrt{k}\right)^2$ pour $k > 0$.

$$z^2 = -4 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = \pm 2i$$

De même, $z^2 = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$ donne $z = \pm i\sqrt{7}$, et $4z^2 + 9 = 0$ s'écrit $z^2 = -\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}i\right)^2$, d'où $z = \pm\frac{3}{2}i$. **Contrôle** : $4 \times \left(\frac{3}{2}i\right)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$. Par le discriminant, $z^2 + 4$ aurait donné $\Delta = -16$ et $\frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$, le même résultat par un chemin plus long.

Réponse. $z = \pm 2i \cdot z = \pm i\sqrt{7} \cdot z = \pm\frac{3}{2}i$.

Correction de l'exercice 5 – Un coefficient irrationnel

$\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 16 = 12 - 16 = -4$, donc

$$z = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$$

Le nombre $\sqrt{3} + i$ a pour module $\sqrt{3 + 1} = 2$ et, avec $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, pour argument $\frac{\pi}{6}$: $\sqrt{3} + i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$, et son conjugué $\sqrt{3} - i = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$. **Contrôle** : le produit des racines, $2 \times 2\,\mathrm{e}^{i0} = 4$, est bien $\frac{c}{a}$.

Réponse. $S = \left\langle \sqrt{3} - i\,;\, \sqrt{3} + i \right\rangle$, soit $2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Racine double et discriminant positif

Pour $z^2 - 6z + 9$, $\Delta = 0$: une racine double, $-\dfrac{b}{2a} = 3$, puisque $z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$. Pour $z^2 - 5z + 6$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$:

$$z = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \text{soit} \quad z = 2 \text{ ou } z = 3$$

Dans ces deux cas, résoudre dans ℂ n'apporte aucune solution nouvelle : les solutions réelles sont déjà des complexes. ℂ ne change les choses que lorsque $\Delta < 0$. Dans ℂ, un trinôme a donc toujours deux racines, distinctes ou confondues ; c'est un cas particulier du théorème de d'Alembert-Gauss.

Réponse. $z^2 - 6z + 9 = 0$: racine double $3 \cdot z^2 - 5z + 6 = 0$: $S = \{2\,;3\}$. ℂ n'ajoute des solutions que lorsque $\Delta < 0$.

Correction de l'exercice 7 – Factoriser un trinôme dans C

$\Delta = 4 - 20 = -16$, donc les racines sont $\dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$, et comme $a = 1$,

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$$

Vérification : on reconnaît $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ avec $A = z+1$ et $B = 2i$, soit $(z+1)^2 - (2i)^2 = z^2 + 2z + 1 + 4 = P(z)$. Cette factorisation est impossible dans $\mathbb{R}$: $P(x) = (x+1)^2 + 4 \geq 4$ n'a pas de racine réelle.

Réponse. $P(z) = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$.

Correction de l'exercice 8 – Reconstruire l'équation

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

a) $S = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ et $P = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$:

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

Les coefficients sont réels, car les deux racines sont conjuguées. **Contrôle** : $\Delta = -36$ et $\dfrac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

b) $S = i - 2i = -i$ et $P = i \times (-2i) = 2$: l'équation $z^2 + iz + 2 = 0$ a un coefficient non réel. C'est inévitable : i et $-2i$ ne sont pas conjugués, et une équation à coefficients réels a ses racines non réelles par paires conjuguées. **Contrôle** : $i^2 + i \times i + 2 = 0$ et $(-2i)^2 + i(-2i) + 2 = 0$.

Réponse. a) $z^2 - 4z + 13 = 0$ · b) $z^2 + iz + 2 = 0$, à coefficients non réels car i et $-2i$ ne sont pas conjugués.

Correction de l'exercice 9 – Retrouver les coefficients

Les coefficients étant réels, le conjugué d'une racine est racine : l'autre racine est $1 + i$. Le polynôme unitaire a pour somme des racines l'opposé du coefficient de z, et pour produit le terme constant :

$$-a = (1 - i) + (1 + i) = 2 \qquad b = (1 - i)(1 + i) = 2$$

donc $a = -2$, $b = 2$ et $P(z) = z^2 - 2z + 2$. **Contrôle** par substitution : $(1 - i)^2 = -2i$, et $-2i - 2(1 - i) + 2 = 0$. On aurait aussi pu écrire $P(1 - i) = (a + b) + (-2 - a)i = 0$ et annuler parties réelle et imaginaire.

Réponse. $a = -2$ et $b = 2$, soit $P(z) = z^2 - 2z + 2$; l'autre racine est $1 + i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Une racine imaginaire pure en degré 3

a) $(3i)^2 = -9$ et $(3i)^3 = -27i$, donc $P(3i) = -27i + 18 + 27i - 18 = 0$.

b) Les coefficients de P sont réels : le conjugué $-3i$ est aussi racine.

c) P est donc divisible par $(z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9$, et le quotient est de degré 1 : $P(z) = (z^2 + 9)(z - \alpha)$. Le terme constant donne $-9\alpha = -18$, soit $\alpha = 2$:

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + 9) = (z - 2)(z - 3i)(z + 3i)$$

Les solutions sont 2, $3i$ et $-3i$. **Contrôle** : $(z^2 + 9)(z - 2) = z^3 - 2z^2 + 9z - 18$.

Réponse. a) $P(3i) = 0$ · b) $-3i$, car les coefficients sont réels · c) $P(z) = (z - 2)\left(z^2 + 9\right)$ et $S = \{2\,;3i\,;-3i\}$.

Correction de l'exercice 11 – Second degré à coefficients complexes

Les coefficients ne sont pas réels : on cherche une racine carrée du discriminant.

$$\Delta = (5 + i)^2 - 4(8 + i) = 24 + 10i - 32 - 4i = -8 + 6i$$

Avec $\delta = x + iy$ et $\delta^2 = \Delta$: $x^2 - y^2 = -8$, $xy = 3$ et $x^2 + y^2 = |\Delta| = 10$, d'où $x^2 = 1$, $y^2 = 9$, de même signe : $\delta = 1 + 3i$. Les solutions sont $\dfrac{(5 + i) \pm (1 + 3i)}{2}$, soit $3 + 2i$ et $2 - i$. **Contrôle** : la somme $5 + i$ et le produit $(3 + 2i)(2 - i) = 8 + i$ correspondent aux coefficients.

Réponse. $\Delta = -8 + 6i$, $\delta = 1 + 3i$, et $S = \{3 + 2i\,;2 - i\}$.

Correction de l'exercice 12 – Discussion selon un paramètre

a) $\Delta = m^2 - 4$, et les solutions sont non réelles si et seulement si $\Delta < 0$:

$$m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Pour $m = \pm 2$, il y a une racine double réelle.

b) Les coefficients étant réels et $\Delta < 0$, les racines sont conjuguées : $z_2 = \overline{z_1}$. Leur produit vaut $\frac{c}{a} = 1$, donc $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$ et $|z_1| = |z_2| = 1$: les images sont sur le cercle unité.

Contrôle pour $m = 1$: les racines $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ont pour module $\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$.

Réponse. a) $-2 < m < 2$ · b) le produit des racines vaut 1 et elles sont conjuguées, donc $|z|^2 = 1$: les images sont sur le cercle unité.

Correction de l'exercice 13 – Somme et produit imposés

Les deux nombres cherchés sont les racines de $z^2 - 6z + 34 = 0$. Son discriminant vaut $36 - 136 = -100$:

$$z = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$$

Vérification : $(3 - 5i) + (3 + 5i) = 6$ et $(3 - 5i)(3 + 5i) = 9 + 25 = 34$. Dans $\mathbb{R}$, le problème n'aurait pas de solution : deux réels de somme 6 ont un produit $x(6 - x)$ au plus égal à 9.

Réponse. $3 - 5i$ et $3 + 5i$ (racines de $z^2 - 6z + 34 = 0$).

Correction de l'exercice 14 – Une équation bicarrée

En posant $Z = z^2$, on obtient $Z^2 - 3Z - 4$, de discriminant $9 + 16 = 25$, de racines $\dfrac{3 \pm 5}{2}$, soit 4 et -1. Donc $Z^2 - 3Z - 4 = (Z - 4)(Z + 1)$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 1) = (z - 2)(z + 2)(z - i)(z + i)$$

car $z^2 - 4$ est une différence de carrés et $z^2 + 1 = z^2 - i^2$. Les solutions de $P(z) = 0$ sont 2, -2, i et $-i$: quatre solutions pour une équation de degré 4. **Contrôle** : $(z^2 - 4)(z^2 + 1) = z^4 + z^2 - 4z^2 - 4 = P(z)$. S'arrêter aux solutions réelles ± 2 oublierait le facteur $z^2 + 1$.

Réponse. $P(z) = (z - 2)(z + 2)(z - i)(z + i)$, donc $S = \{2\,; -2\,; i\,; -i\}$.

Correction de l'exercice 15 – Oscillations amorties d'une suspension

a) Avec $\lambda = 1$ et $\omega_0 = 5$, l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 25 = 0$, de discriminant $4 - 100 = -96$, et $\sqrt{96} = 4\sqrt{6}$:

$$r = \frac{-2 \pm 4i\sqrt{6}}{2} = -1 \pm 2i\sqrt{6}$$

b) La pseudo-pulsation vaut $\omega = 2\sqrt{6} \approx 4{,}899$ rad/s, et la pseudo-période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx 1{,}283$ s, un peu plus que la période sans amortissement, $\dfrac{2\pi}{5} \approx 1{,}257$ s. La partie réelle -1 donne le facteur d'amortissement e^{-t}.

c) Le régime est pseudo-périodique lorsque $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$, c'est-à-dire $\lambda < \omega_0$. Si l'amortissement dépasse ω_0, les racines deviennent réelles et négatives : la masse revient à l'équilibre sans osciller (régime apériodique) ; pour $\lambda = \omega_0$, c'est le régime critique.

Réponse. a) $r = -1 \pm 2i\sqrt{6}$ · b) $\omega = 2\sqrt{6} \approx 4{,}899$ rad · s^{-1} et $T \approx 1{,}283$ s · c) régime pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$; au-delà, le régime devient apériodique (retour sans oscillation).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).