

Plaquette 1 - Second degré, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorèmes et méthodes du cours.

- **Second degré à coefficients réels** $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$:
- $\Delta > 0$: deux racines réelles $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta = 0$: une racine double $-\frac{b}{2a}$;
- $\Delta < 0$: deux racines **complexes conjuguées** $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- **Factorisation** : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- **Relations coefficients-racines** : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
- **Théorème** : si P est un polynôme à coefficients **réels** et si z_0 est racine, alors $\bar{z}_0$ est aussi racine. Les racines non réelles vont donc par paires conjuguées.
- Conséquence : un polynôme réel de degré 3 a **au moins une** racine réelle.
- **Racine évidente** : on teste 1, -1, 2, -2, ... puis on factorise par $(z - z_0)$ (identification ou division euclidienne).
- **Changement d'inconnue** : pour une équation bicarrée $az^4 + bz^2 + c = 0$, on pose $Z = z^2$.
- **d'Alembert-Gauss** : tout polynôme de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité.

Correction de l'exercice 1 - Discriminant négatif

a) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{3}$ et

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

— Les deux racines sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$: ce sont les racines cubiques non réelles de l'unité.

b) $\Delta = 16 - 40 = -24$, donc $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et

$$z = \frac{4 \pm 2i\sqrt{6}}{4} = 1 \pm \frac{i\sqrt{6}}{2}$$

— Contrôle par la somme : $z_1 + z_2 = 2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2}$. Cohérent.

Réponse. a) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $1 \pm \frac{i\sqrt{6}}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Racine double

— $\Delta = 36 - 36 = 0$: il y a une **racine double**.

— $z_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$.

— Factorisation : $z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2$.

- On reconnaît d'ailleurs l'identité remarquable $(z - 3)^2$. La racine 3 est de **multiplicité 2** : conformément au théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme de degré 2 a bien deux racines comptées avec multiplicité.

Réponse. $z = 3$ (racine double), $z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2$.

Correction de l'exercice 3 - Factoriser à partir des racines

a) $\Delta = 4 - 40 = -36$, donc $\sqrt{-\Delta} = 6$ et $z = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$.

b) $P(z) = (z - (1 + 3i))(z - (1 - 3i))$.

- Contrôle : $(z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i) = (z - 1)^2 - (3i)^2 = z^2 - 2z + 1 + 9 = z^2 - 2z + 10$. Correct.

c) **Non** : P n'a aucune racine réelle (son discriminant est négatif), donc il est **irréductible** dans $\mathbb{R}$. C'est tout l'intérêt de $\mathbb{C}$: on y factorise toujours.

Réponse. a) $1 \pm 3i$ · b) $(z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)$ · c) non, irréductible dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 - Racines conjuguées

a) Théorème du cours : pour un polynôme à coefficients réels, le conjugué d'une racine est aussi racine.

— L'autre racine est donc $\overline{2 - 5i} = 2 + 5i$.

b) On utilise les relations coefficients-racines.

— Somme : $(2 - 5i) + (2 + 5i) = 4$, donc $-b = 4$ et $b = -4$.

— Produit : $(2 - 5i)(2 + 5i) = 4 + 25 = 29$, donc $c = 29$.

$$P(z) = z^2 - 4z + 29$$

— Contrôle : $\Delta = 16 - 116 = -100$, et $\frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$. Correct.

Réponse. a) $2 + 5i$ · b) $P(z) = z^2 - 4z + 29$.

Correction de l'exercice 5 - Coefficients complexes

Attention : les coefficients ne sont pas réels, les racines n'ont donc aucune raison d'être conjuguées.

— Essai de $z = 1$: $1 - (3 + i) + (2 + 2i) = 1 - 3 - i + 2 + 2i = i \neq 0$. Non.

— Essai de $z = 2$: $4 - (6 + 2i) + (2 + 2i) = 4 - 6 - 2i + 2 + 2i = 0$. **2 est racine.**

— On utilise les relations coefficients-racines : le produit des racines vaut $2 + 2i$, donc l'autre racine est $\frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$.

— Contrôle par la somme : $2 + (1 + i) = 3 + i$, ce qui correspond bien à $-\frac{b}{a}$.

— Les solutions sont donc 2 et $1 + i$ — elles ne sont pas conjuguées, conformément à la remarque initiale.

Réponse. $z = 2$ ou $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 6 - Équation bicarrée

On pose $Z = z^2$: l'équation devient $Z^2 + 3Z - 4 = 0$.

— $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $Z = \frac{-3 \pm 5}{2}$: $Z_1 = 1$ et $Z_2 = -4$.

— **Retour à z** :

- $z^2 = 1$ donne $z = 1$ ou $z = -1$;
- $z^2 = -4$ donne $z = 2i$ ou $z = -2i$.
- L'équation a donc **quatre** solutions : $1, -1, 2i, -2i$ — conformément au théorème de d'Alembert-Gauss pour un degré 4.
- Contrôle pour $z = 2i$: $z^4 = 16, 3z^2 = -12$, donc $16 - 12 - 4 = 0$. Correct.

Réponse. $z \in \{1; -1; 2i; -2i\}$.

Correction de l'exercice 7 - Degré 3 avec racine évidente

- a) $P(2) = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$: 2 est bien racine.
- b) On cherche $Q(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ tel que $P(z) = (z - 2)Q(z)$.
- Développement : $z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2z^2 - 2\alpha z - 2\beta = z^3 + (\alpha - 2)z^2 + (\beta - 2\alpha)z - 2\beta$.
 - Identification : $\alpha - 2 = -2$ donne $\alpha = 0$; $-2\beta = -8$ donne $\beta = 4$; contrôle : $\beta - 2\alpha = 4$. Cohérent.

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + 4)$$

- c) $z = 2$, ou $z^2 = -4$ donc $z = \pm 2i$.
- Les trois racines sont $2, 2i$ et $-2i$. On note que les deux racines non réelles sont **conjuguées**, comme prévu pour un polynôme à coefficients réels.

Réponse. a) $P(2) = 0$ · b) $(z - 2)(z^2 + 4)$ · c) $z \in \{2; 2i; -2i\}$.

Correction de l'exercice 8 - Degré 3 : identification complète

- a) $P(3) = 27 - 45 + 33 - 15 = 0$: 3 est racine.
- b) On écrit $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
- Terme constant : $-3\beta = -15$, donc $\beta = 5$.
 - Coefficient de z^2 : $\alpha - 3 = -5$, donc $\alpha = -2$.
 - Contrôle du coefficient de z : $\beta - 3\alpha = 5 + 6 = 11$. Cohérent.

$$P(z) = (z - 3)(z^2 - 2z + 5)$$

- Pour le facteur du second degré : $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.
- Les trois racines sont $3, 1 + 2i$ et $1 - 2i$.

Réponse. b) $(z - 3)(z^2 - 2z + 5)$, racines 3 et $1 \pm 2i$.

Correction de l'exercice 9 - Somme et produit imposés

Méthode du cours : deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

- Ici : $z^2 - 6z + 13 = 0$.
- $\Delta = 36 - 52 = -16$, donc $\sqrt{-\Delta} = 4$ et $z = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$.
- Les deux nombres sont $3 + 2i$ et $3 - 2i$.
- Vérification : somme = 6 ; produit = $9 + 4 = 13$. Correct.

Réponse. $3 + 2i$ et $3 - 2i$.

Correction de l'exercice 10 - Racines n-ièmes

Méthode 1 : bicarrée. On pose $Z = z^2$: $Z^2 = 16$, donc $Z = 4$ ou $Z = -4$.

- $z^2 = 4$ donne $z = \pm 2$;

— $z^2 = -4$ donne $z = \pm 2i$.

Méthode 2 : forme exponentielle. $16 = 16e^{i \times 0}$, et $z = re^{i\theta}$ donne $r^4 = 16$ (donc $r = 2$) et $4\theta = 2k\pi$, soit $\theta = \frac{k\pi}{2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

— Solutions : $2, 2i, -2, -2i$.

— Les quatre points images forment un **carré** inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. $z \in \{2; 2i; -2; -2i\}$.

Correction de l'exercice 11 - Équation avec conjugué

On pose $z = x + iy$ avec x, y réels, donc $\bar{z} = x - iy$.

— $z + 2\bar{z} = (x + iy) + 2(x - iy) = 3x - iy$.

— L'équation devient $3x - iy = 3 - i$.

— Par **identification** des parties réelle et imaginaire : $3x = 3$ et $-y = -1$.

— Donc $x = 1$ et $y = 1$, soit $z = 1 + i$.

— Vérification : $(1 + i) + 2(1 - i) = 1 + i + 2 - 2i = 3 - i$. Correct.

— **Méthode à retenir** : dès qu'une équation mêle z et $\bar{z}$, on repasse aux parties réelle et imaginaire.

Réponse. $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 12 - Équation de degré 4 à racines conjuguées

a) On reconnaît $(z^2)^2 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$.

— Et $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, donc

$$P(z) = (z - i)^2(z + i)^2$$

b) Les racines sont i et $-i$, chacune de **multiplicité 2**.

— Total : $2 + 2 = 4$ racines comptées avec multiplicité, conformément au degré 4 (théorème de d'Alembert-Gauss).

— Contrôle : $P(i) = 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$. Correct.

Réponse. a) $(z - i)^2(z + i)^2$ · b) i et $-i$, chacune double.

Correction de l'exercice 13 - Synthèse : étude complète

a) $P(i) = i^3 - (4 + i)i^2 + (5 + 4i)i - 5i$.

— $i^3 = -i$; $-(4 + i)i^2 = (4 + i)$; $(5 + 4i)i = 5i - 4$.

— Somme : $-i + 4 + i + 5i - 4 - 5i = 0$. Donc i est racine.

b) On développe $(z - i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib$.

— $= z^3 + (a - i)z^2 + (b - ia)z - ib$.

— Identification : $a - i = -(4 + i)$ donne $a = -4$; $-ib = -5i$ donne $b = 5$.

— Contrôle du coefficient de z : $b - ia = 5 + 4i$. Cohérent avec l'énoncé.

$$P(z) = (z - i)(z^2 - 4z + 5)$$

c) Pour le second facteur : $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc $z = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

— Les trois racines sont $i, 2 + i$ et $2 - i$.

— Remarque : P n'ayant **pas** tous ses coefficients réels, les racines ne vont pas nécessairement par paires conjuguées — ici i est seule, tandis que $2 \pm i$ forment une

paire par coïncidence.

Réponse. a) $P(i) = 0$ · b) $a = -4$, $b = 5$ · c) $z \in \{i; 2 + i; 2 - i\}$.