Plaquette 1 – Second degré, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorèmes et méthodes du cours.

— **Second degré à coefficients réels** $az^2+bz+c=0$ ($a\neq 0$), $\Delta=b^2-4ac$:

— $\Delta>0$: deux racines réelles $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;

— $\Delta=0$: une racine double $-\dfrac{b}{2a}$;

— $\Delta<0$: deux racines **complexes conjuguées** $\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

— **Factorisation** : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

$$\Delta<0 \quad\Longrightarrow\quad z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a},\quad z_2=\overline{z_1}=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

— **Relations coefficients-racines** : $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

— **Théorème** : si P est un polynôme à coefficients **réels** et si z_0 est racine, alors $\overline{z_0}$ est aussi racine. Les racines non réelles vont donc par paires conjuguées.

— Conséquence : un polynôme réel de degré 3 a **au moins une** racine réelle.

— **Racine évidente** : on teste 1, -1, 2, -2, … puis on factorise par $(z-z_0)$ (identification ou division euclidienne).

— **Changement d'inconnue** : pour une équation bicarrée $az^4+bz^2+c=0$, on pose $Z=z^2$.

— **Théorème de d'Alembert-Gauss** : tout polynôme de degré $n\geq 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité.

Correction de l'exercice 1 – Discriminant négatif

a) $\Delta=1-4=-3<0$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{3}$ et

$$z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

— Les deux racines sont $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: ce sont les racines cubiques non réelles de l'unité.

b) $\Delta=16-40=-24$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ et

$$z=\frac{4\pm 2i\sqrt{6}}{4}=1\pm\frac{i\sqrt{6}}{2}$$

— Contrôle par la somme : $z_1+z_2=2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{2}$. Cohérent.

Réponse. a) $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ · b) $1\pm\dfrac{i\sqrt{6}}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Racine double

— $\Delta=36-36=0$: il y a une **racine double**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $z_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.

— Factorisation : $z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$.

— On reconnaît d'ailleurs l'identité remarquable $(z-3)^2$. La racine 3 est de **multiplicité** 2 : conformément au théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme de degré 2 a bien deux racines comptées avec multiplicité.

Réponse. $z = 3$ (racine double), $z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$.

Correction de l'exercice 3 – Factoriser à partir des racines

a) $\Delta = 4 - 40 = -36$, donc $\sqrt{-\Delta} = 6$ et $z = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$.

b) $P(z) = (z - (1+3i))(z - (1-3i))$.

— Contrôle : $(z-1-3i)(z-1+3i) = (z-1)^2 - (3i)^2 = z^2 - 2z + 1 + 9 = z^2 - 2z + 10$. Correct.

c) **Non** : P n'a aucune racine réelle (son discriminant est négatif), donc il est **irréductible** dans $\mathbb{R}$. C'est tout l'intérêt de $\mathbb{C}$: on y factorise toujours.

Réponse. a) $1 \pm 3i$ · b) $(z-1-3i)(z-1+3i)$ · c) non, irréductible dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 – Racines conjuguées

a) Théorème du cours : pour un polynôme à coefficients réels, le conjugué d'une racine est aussi racine.

— L'autre racine est donc $\overline{2-5i} = 2+5i$.

b) On utilise les relations coefficients-racines.

— Somme : $(2-5i) + (2+5i) = 4$, donc $-b = 4$ et $b = -4$.

— Produit : $(2-5i)(2+5i) = 4 + 25 = 29$, donc $c = 29$.

$$P(z) = z^2 - 4z + 29$$

— Contrôle : $\Delta = 16 - 116 = -100$, et $\dfrac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$. Correct.

Réponse. a) $2 + 5i$ · b) $P(z) = z^2 - 4z + 29$.

Correction de l'exercice 5 – Coefficients complexes

Attention : les coefficients ne sont pas réels, les racines n'ont donc aucune raison d'être conjuguées.

— Essai de $z = 1$: $1 - (3+i) + (2+2i) = 1 - 3 - i + 2 + 2i = i \neq 0$. Non.

— Essai de $z = 2$: $4 - (6+2i) + (2+2i) = 4 - 6 - 2i + 2 + 2i = 0$. 2 **est racine.**

— On utilise les relations coefficients-racines : le produit des racines vaut $2 + 2i$, donc l'autre racine est $\dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$.

— Contrôle par la somme : $2 + (1+i) = 3 + i$, ce qui correspond bien à $-\dfrac{b}{a}$.

— Les solutions sont donc 2 et $1 + i$ — elles ne sont pas conjuguées, conformément à la remarque initiale.

Réponse. $z = 2$ ou $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 6 – Équation bicarrée

On pose $Z = z^2$: l'équation devient $Z^2 + 3Z - 4 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $Z = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$: $Z_1 = 1$ et $Z_2 = -4$.

— **Retour à** z :

— $z^2 = 1$ donne $z = 1$ ou $z = -1$;

— $z^2 = -4$ donne $z = 2i$ ou $z = -2i$.

— L'équation a donc **quatre** solutions : 1, -1, $2i$, $-2i$ — conformément au théorème de d'Alembert-Gauss pour un degré 4.

— Contrôle pour $z = 2i$: $z^4 = 16$, $3z^2 = -12$, donc $16 - 12 - 4 = 0$. Correct.

Réponse. $z \in \{1\,;-1\,;2i\,;-2i\}$.

Correction de l'exercice 7 – Degré 3 avec racine évidente

a) $P(2) = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$: 2 est bien racine.

b) On cherche $Q(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ tel que $P(z) = (z-2)Q(z)$.

— Développement : $z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2z^2 - 2\alpha z - 2\beta = z^3 + (\alpha - 2)z^2 + (\beta - 2\alpha)z - 2\beta$.

— Identification : $\alpha - 2 = -2$ donne $\alpha = 0$; $-2\beta = -8$ donne $\beta = 4$; contrôle : $\beta - 2\alpha = 4$. Cohérent.

$$P(z) = (z-2)(z^2+4)$$

c) $z = 2$, ou $z^2 = -4$ donc $z = \pm 2i$.

— Les trois racines sont 2, $2i$ et $-2i$. On note que les deux racines non réelles sont **conjuguées**, comme prévu pour un polynôme à coefficients réels.

Réponse. a) $P(2) = 0$ · b) $(z-2)(z^2+4)$ · c) $z \in \{2\,;2i\,;-2i\}$.

Correction de l'exercice 8 – Degré 3 : identification complète

a) $P(3) = 27 - 45 + 33 - 15 = 0$: 3 est racine.

b) On écrit $P(z) = (z-3)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

— Terme constant : $-3\beta = -15$, donc $\beta = 5$.

— Coefficient de z^2 : $\alpha - 3 = -5$, donc $\alpha = -2$.

— Contrôle du coefficient de z : $\beta - 3\alpha = 5 + 6 = 11$. Cohérent.

$$P(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 5)$$

— Pour le facteur du second degré : $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $z = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.

— Les trois racines sont 3, $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

Réponse. b) $(z-3)(z^2 - 2z + 5)$, racines 3 et $1 \pm 2i$.

Correction de l'exercice 9 – Somme et produit imposés

Méthode du cours : deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

— Ici : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

— $\Delta = 36 - 52 = -16$, donc $\sqrt{-\Delta} = 4$ et $z = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$.

— Les deux nombres sont $3 + 2i$ et $3 - 2i$.

— Vérification : somme $= 6$; produit $= 9 + 4 = 13$. Correct.

Réponse. $3 + 2i$ et $3 - 2i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Racines n-ièmes

Méthode 1 : bicarrée. On pose $Z = z^2$: $Z^2 = 16$, donc $Z = 4$ ou $Z = -4$.

— $z^2 = 4$ donne $z = \pm 2$;
— $z^2 = -4$ donne $z = \pm 2i$.

Méthode 2 : forme exponentielle. $16 = 16\mathrm{e}^{i \times 0}$, et $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ donne $r^4 = 16$ (donc $r = 2$) et $4\theta = 2k\pi$, soit $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

— Solutions : 2, $2i$, -2, $-2i$.
— Les quatre points images forment un **carré** inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. $z \in \{2\,;2i\,;-2\,;-2i\}$.

Correction de l'exercice 11 – Équation avec conjugué

On pose $z = x + iy$ avec x, y réels, donc $\overline{z} = x - iy$.

— $z + 2\overline{z} = (x + iy) + 2(x - iy) = 3x - iy$.
— L'équation devient $3x - iy = 3 - i$.
— Par **identification** des parties réelle et imaginaire : $3x = 3$ et $-y = -1$.
— Donc $x = 1$ et $y = 1$, soit $z = 1 + i$.
— Vérification : $(1 + i) + 2(1 - i) = 1 + i + 2 - 2i = 3 - i$. Correct.
— **Méthode à retenir** : dès qu'une équation mêle z et $\overline{z}$, on repasse aux parties réelle et imaginaire.

Réponse. $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 12 – Équation de degré 4 à racines conjuguées

a) On reconnaît $\left(z^2\right)^2 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$.

— Et $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, donc

$$P(z) = (z - i)^2(z + i)^2$$

b) Les racines sont i et $-i$, chacune de **multiplicité** 2.

— Total : $2 + 2 = 4$ racines comptées avec multiplicité, conformément au degré 4 (théorème de d'Alembert-Gauss).
— Contrôle : $P(i) = 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$. Correct.

Réponse. a) $(z - i)^2(z + i)^2$ · b) i et $-i$, chacune double.

Correction de l'exercice 13 – Une racine lue sur la courbe

a) La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1, et en effet $f(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

b) On factorise par $z - 1$ en regroupant les termes deux à deux :

$$P(z) = z^2(z - 1) + (z - 1) = (z - 1)\left(z^2 + 1\right)$$

Le second facteur s'annule pour $z^2 = -1$, soit $z = i$ ou $z = -i$. Les solutions sont 1, i et $-i$. La courbe ne montre que la racine réelle : les deux autres, conjuguées, n'apparaissent pas sur le graphique d'une fonction de la variable réelle. **Contrôle** : la somme des racines, $1 + i - i = 1$, est bien l'opposé du coefficient de z^2.

Réponse. a) 1, car $f(1) = 0$ · b) $P(z) = (z - 1)(z^2 + 1)$ et $S = \{1\,;i\,;-i\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Retrouver un trinôme à partir de ses racines

On lit $z_A = -1 + 2i$ et $z_B = -1 - 2i$: les deux racines sont conjuguées, ce qui est cohérent avec des coefficients réels (les points sont symétriques par rapport à l'axe des réels). Pour un trinôme unitaire, la somme des racines est $-b$ et leur produit est c :

$$-b = (-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -2 \qquad c = (-1 + 2i)(-1 - 2i) = 1 + 4 = 5$$

Donc $b = 2$ et $c = 5$: le trinôme est $z^2 + 2z + 5$. **Contrôle** : son discriminant vaut $4 - 20 = -16$ et ses racines $\dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Réponse. $z_A = -1 + 2i$, $z_B = -1 - 2i$, et le trinôme est $z^2 + 2z + 5$ ($b = 2$, $c = 5$).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète

a) $P(i) = i^3 - (4 + i)i^2 + (5 + 4i)i - 5i$.

— $i^3 = -i$; $-(4 + i)i^2 = (4 + i)$; $(5 + 4i)i = 5i - 4$.

— Somme : $-i + 4 + i + 5i - 4 - 5i = 0$. Donc i est racine.

b) On développe $(z - i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib$.

— $= z^3 + (a - i)z^2 + (b - ia)z - ib$.

— Identification : $a - i = -(4 + i)$ donne $a = -4$; $-ib = -5i$ donne $b = 5$.

— Contrôle du coefficient de z : $b - ia = 5 + 4i$. Cohérent avec l'énoncé.

$$P(z) = (z - i)(z^2 - 4z + 5)$$

c) Pour le second facteur : $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc $z = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

— Les trois racines sont i, $2 + i$ et $2 - i$.

— Remarque : P n'ayant **pas** tous ses coefficients réels, les racines ne vont pas nécessairement par paires conjuguées — ici i est seule, tandis que $2 \pm i$ forment une paire par coïncidence.

Réponse. a) $P(i) = 0$ · b) $a = -4$, $b = 5$ · c) $z \in \{i\,;\,2 + i\,;\,2 - i\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).