Plaquette 5 – Synthèse : relations coefficients-racines, démonstrations et modélisation

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes se factorise en

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

les z_k n'étant pas nécessairement distincts. Il admet donc exactement n racines comptées avec leur multiplicité.

Relations coefficients-racines. En développant la forme factorisée et en identifiant :

$$\sum_k z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \sum_{i<j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \qquad \prod_k z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Deux conséquences très utiles :

$$\sum_k z_k^2 = \left(\sum_k z_k\right)^2 - 2\sum_{i<j} z_i z_j \qquad \sum_k \frac{1}{z_k} = \frac{\sum_{i<j} z_i z_j}{\prod_k z_k}$$

Racines conjuguées. Si tous les coefficients sont **réels** et si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi, **avec la même multiplicité**. Conséquences :

- le nombre de racines non réelles est **pair** ;
- un polynôme réel de degré **impair** a donc au moins une racine réelle ;
- P se factorise sur $\mathbb{R}$ en produit de facteurs de degré 1 et de trinômes à discriminant négatif.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. Si $\frac{p}{q}$ est racine, écrite sous forme irréductible, alors p divise le terme constant a_0 et q divise le coefficient dominant a_n. C'est ce qui rend la recherche de racine évidente **finie**.

Polynôme minimal. Pour obtenir un polynôme à coefficients rationnels admettant un nombre donné pour racine, on multiplie entre eux les facteurs correspondant à **tous ses conjugués** — c'est ce qui fait disparaître les radicaux et les i.

Correction de l'exercice 1 – Degré impair et racine réelle

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P, de degré n impair, a exactement n racines complexes comptées avec leur multiplicité. Ses coefficients étant réels, le conjugué d'une racine non réelle z_0 est une autre racine (car $\overline{z_0} \neq z_0$), de même multiplicité : les racines non réelles se regroupent par paires, et leur nombre est pair.

$$\text{nombre de racines réelles} = n - (\text{nombre pair})$$

Comme n est impair, ce nombre est impair, donc non nul : P a au moins une racine réelle. Par exemple, $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = (z-3)(z^2+4)$ a la racine réelle 3 et la paire $\pm 2i$. En degré pair, c'est faux : $z^2 + 1$ a pour racines $\pm i$, aucune réelle. Graphiquement, une fonction polynôme de degré impair va de $-\infty$ à $+\infty$ et coupe donc l'axe des abscisses.

Réponse. Les racines non réelles vont par paires conjuguées, donc leur nombre est pair ; un degré impair laisse donc un nombre impair — donc non nul — de racines réelles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contre-exemple en degré pair : z^2+1.

Correction de l'exercice 2 – Somme des inverses des racines

a) Pour $z^3-6z^2+11z-6$, la somme des racines vaut 6, la somme des produits deux à deux 11, et le produit $-(-6)=6$.

b) Aucune racine n'est nulle (leur produit vaut 6), et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=\frac{11}{6}$$

c) 1 est racine ($1-6+11-6=0$), et la factorisation $(z-1)(z^2-5z+6)=(z-1)(z-2)(z-3)$ donne les racines 1, 2, 3. **Vérification** : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$, obtenu au b) sans résoudre l'équation.

Réponse. a) somme 6, produits deux à deux 11, produit 6 · b) $\frac{11}{6}$ · c) racines 1, 2, 3, et $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 3 – Somme des carrés sans résoudre

Pour ce polynôme unitaire, la somme des racines vaut 2 et la somme des produits deux à deux 7. En développant le carré d'une somme de quatre termes, on obtient les quatre carrés et deux fois chacun des six produits, donc

$$\sum z_k^2=\left(\sum z_k\right)^2-2\sum_{i<j}z_iz_j=2^2-2\times 7=-10$$

Le résultat est négatif : les racines ne sont donc pas toutes réelles (une somme de carrés de réels serait positive). Ici aucune racine évidente n'apparaît ($P(1)=5$, $P(-1)=1$), mais les relations entre coefficients et racines donnent le résultat sans les connaître. On obtiendrait de même $\sum\frac{1}{z_k}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$.

Réponse. $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=2^2-2\times 7=-10$.

Correction de l'exercice 4 – Racine rationnelle d'un polynôme entier

Une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ a son numérateur parmi ±1, ±2 et son dénominateur parmi 1, 3. Après les échecs de 1 et 2, on essaie $\frac{1}{3}$:

$$3\times\frac{1}{27}-7\times\frac{1}{9}+8\times\frac{1}{3}-2=\frac{1-7+24-18}{9}=0$$

On factorise par $3z-1$: $(3z-1)(z^2+bz+c)$ avec $-c=-2$, soit $c=2$, et $3b-1=-7$, soit $b=-2$; le terme en z, $3c-b=8$, concorde. Le trinôme z^2-2z+2 a pour racines $1\pm i$. Les solutions sont $\frac{1}{3}$ et $1\pm i$. **Contrôle** : la somme $\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}=-\frac{-7}{3}$.

Réponse. $S=\left\langle\frac{1}{3}\,;1+i\,;1-i\right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 – Racines doubles d'une réciproque

Les coefficients sont palindromes et 0 n'est pas solution : on divise par z^2 et l'on pose $u=z+\frac{1}{z}$, avec $z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2$. L'équation devient $u^2-2u+1=(u-1)^2=0$, donc $u=1$, racine double, et $z+\frac{1}{z}=1$ s'écrit $z^2-z+1=0$, de solutions $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. On le confirme en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

développant :

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = \left(z^2 - z + 1\right)^2$$

(le terme en z^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$). Chacune des deux racines est double : $2 + 2 = 4$ racines comptées avec multiplicité. Elles sont de module $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, et chacune est l'inverse de l'autre.

Réponse. $S = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$, chacune racine **double** : $P(z) = \left(z^2 - z + 1\right)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Racines cubiques de 1 + i

On écrit $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et l'on cherche $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$: $r^3 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, donc $r = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$, et $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$:

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\}$$

soit les arguments $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{17\pi}{12}$. Pour $k = 1$, on obtient une forme algébrique simple : $z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1 + i)$. **Contrôle** : le produit des trois racines de $z^3 - (1 + i)$ vaut $1 + i$, et effectivement leurs modules donnent $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \sqrt{2}$ et leurs arguments $\frac{\pi}{4} + 2\pi$.

Réponse. $z_k = 2^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ pour $k = 0$, 1, 2.

Correction de l'exercice 7 – Une équation de degré 6 sur le cercle unité

On pose $Z = z^3$: $Z^2 + Z + 1 = 0$ a pour solutions $Z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$, de module 1. Pour $z^3 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$: $r^3 = 1$, donc $r = 1$, et $3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, soit $\theta = \frac{2\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$, $\frac{14\pi}{9}$; l'autre équation donne les angles opposés.

$$S = \left\{ \mathrm{e}^{\pm i\frac{2\pi}{9}} ; \mathrm{e}^{\pm i\frac{8\pi}{9}} ; \mathrm{e}^{\pm i\frac{14\pi}{9}} \right\}$$

Toutes ont pour module 1 : en effet, $|z|^3 = |Z| = 1$ pour toute solution. **Contrôle** : $z^6 + z^3 + 1 = \frac{z^9 - 1}{z^3 - 1}$, donc les solutions sont les $9 - 3 = 6$ racines neuvièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques.

Réponse. $S = \left\{ \mathrm{e}^{\pm i\frac{2\pi}{9}} ; \mathrm{e}^{\pm i\frac{8\pi}{9}} ; \mathrm{e}^{\pm i\frac{14\pi}{9}} \right\}$: les racines neuvièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques, toutes de module 1.

Correction de l'exercice 8 – Un polynôme à coefficients rationnels

Si l'on isole seulement le radical, $z - i = \sqrt{2}$ donne $z^2 - 2iz - 3 = 0$, dont un coefficient n'est pas réel. Il faut faire intervenir les quatre « conjugués » $\pm\sqrt{2} \pm i$, en les regroupant par paires :

$$\left[\left(z - \sqrt{2}\right)^2 + 1\right]\left[\left(z + \sqrt{2}\right)^2 + 1\right] = \left(z^2 + 3 - 2\sqrt{2}z\right)\left(z^2 + 3 + 2\sqrt{2}z\right) = \left(z^2 + 3\right)^2 - 8z^2$$

d'où $P(z) = z^4 - 2z^2 + 9$, à coefficients entiers. **Vérification** : $\left(\sqrt{2} + i\right)^2 = 1 + 2i\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2} + i\right)^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$, et $-7 + 4i\sqrt{2} - 2 - 4i\sqrt{2} + 9 = 0$. Le degré 4 est minimal, car un polynôme à coefficients entiers annulant $\sqrt{2} + i$ annule aussi ses trois conjugués.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P(z) = z^4 - 2z^2 + 9$, de degré 4 (minimal), de racines $\pm\sqrt{2} \pm i$.

Correction de l'exercice 9 – Une équation fonctionnelle

On écrit $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$. En développant $P(z+1)$, les termes en z^2 et en bz s'éliminent dans la différence :

$$P(z+1) - P(z) = 2az + a + b$$

Cette expression doit être égale à z pour tout z : par identification, $2a = 1$ et $a + b = 0$, soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, tandis que c reste libre. Donc $P(z) = \frac{z^2 - z}{2} + c$, avec c quelconque.

Vérification : $\frac{(z+1)^2 - (z+1) - z^2 + z}{2} = \frac{2z}{2} = z$. Avec $c = 0$, $P(n) = \frac{n(n-1)}{2} = 0 + 1 + \cdots + (n-1)$; par exemple $P(5) = 10$.

Réponse. $P(z) = \frac{z^2 - z}{2} + c$, avec c quelconque.

Correction de l'exercice 10 – Un triangle équilatéral

On écrit $8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$: avec $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, soit $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$:

$$S = \left\langle \sqrt{3} + i\,;\, -\sqrt{3} + i\,;\, -2i \right\rangle$$

Les trois points sont sur le cercle de rayon 2, et leurs arguments sont espacés de $\frac{2\pi}{3}$: ils partagent le cercle en trois arcs égaux et forment un triangle équilatéral. **Contrôle** : $\left|\left(\sqrt{3}+i\right) - \left(-\sqrt{3}+i\right)\right| = 2\sqrt{3}$ et $\left|\left(\sqrt{3}+i\right) - (-2i)\right| = \left|\sqrt{3} + 3i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. L'aire vaut $\frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}196$.

Réponse. $S = \left\langle \sqrt{3} + i\,;\, -\sqrt{3} + i\,;\, -2i \right\rangle$; triangle équilatéral de côté $2\sqrt{3}$ et d'aire $3\sqrt{3} \approx 5{,}196$.

Correction de l'exercice 11 – Centre de gravité des racines

a) Le coefficient de z^2 est nul, donc la somme des racines vaut 0, et le centre de gravité des trois images a pour affixe

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0$$

c'est l'origine. **Exemple** : les racines cubiques de l'unité, 1, j et j^2, ont une somme nulle ; de même 1, 1 et -2 pour $z^3 - 3z + 2$.

b) Pour $z^3 + 2z^2 + pz + q$, la somme des racines vaut -2, donc $z_G = -\frac{2}{3}$: le centre de gravité n'est plus l'origine. En général, pour un polynôme unitaire de degré n, $z_G = -\frac{a_{n-1}}{n}$; le changement d'inconnue $z = w - \frac{a_{n-1}}{n}$ recentre les racines et fait disparaître ce terme.

Réponse. a) la somme des racines vaut 0, donc $z_G = 0$ · b) non : $z_G = -\frac{2}{3}$. En général, $z_G = -\frac{a_{n-1}}{n}$ pour un polynôme unitaire.

Correction de l'exercice 12 – Trois racines de module 1

a) Le produit des racines vaut $-c$, donc $|c| = |z_1|\,|z_2|\,|z_3| = 1$.

b) La somme des racines vaut $-a$. Par l'inégalité triangulaire, étendue à trois termes,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|a| = |z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| = 3$$

De même, $b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ est une somme de trois nombres de module 1, donc $|b| \le 3$.

c) L'égalité $|a| = 3$ exige que les trois racines aient le même argument ; de module 1, elles sont alors égales. Avec la racine triple 1 : $(z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$, où $|a| = |b| = 3$ et $|c| = 1$. Avec la racine triple i, $(z-i)^3$ convient aussi.

Réponse. a) $|c| = 1$ · b) par l'inégalité triangulaire, $|a| \le 3$ et $|b| \le 3$ · c) $(z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$.

Correction de l'exercice 13 – Reconstituer un polynôme réel

Les coefficients étant réels, $1 - i\sqrt{2}$ est aussi racine : les quatre racines sont 2, -1 et $1 \pm i\sqrt{2}$. Les racines réelles donnent $(z-2)(z+1) = z^2 - z - 2$, la paire conjuguée donne $(z-1)^2 + 2 = z^2 - 2z + 3$:

$$P(z) = \left(z^2 - z - 2\right)\left(z^2 - 2z + 3\right) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 + z - 6$$

(terme en z^3 : $-2 - 1 = -3$; en z^2 : $3 + 2 - 2 = 3$; en z : $-3 + 4 = 1$). **Contrôle** : $P(2) = 16 - 24 + 12 + 2 - 6 = 0$ et $P(-1) = 1 + 3 + 3 - 1 - 6 = 0$; la somme des racines vaut 3 et leur produit $-2 \times 3 = -6$.

Réponse. $P(z) = \left(z^2 - z - 2\right)\left(z^2 - 2z + 3\right) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 + z - 6$.

Correction de l'exercice 14 – Un correcteur de boucle de régulation

a) Si les racines sont réelles, leur produit 2 est positif : elles ont le même signe, et elles sont négatives si et seulement si leur somme $3 - K$ l'est. Si elles sont complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, leur partie réelle vaut $\alpha = \dfrac{3-K}{2}$. Dans les deux cas, la stabilité équivaut à

$$3 - K < 0 \Leftrightarrow K > 3$$

b) Le système oscille quand $\Delta = (K-3)^2 - 8 < 0$, c'est-à-dire $|K-3| < 2\sqrt{2}$, soit $3 - 2\sqrt{2} < K < 3 + 2\sqrt{2}$ (environ entre 0,172 et 5,828).

c) Les oscillations sont amorties quand les deux conditions sont réunies : $3 < K < 3 + 2\sqrt{2}$. Au-delà, le régime est apériodique (retour sans dépassement, mais plus lent). Pour $K = 3$, l'équation devient $r^2 + 2 = 0$, de racines $\pm i\sqrt{2}$: partie réelle nulle, le système oscille indéfiniment à la pulsation $\sqrt{2}$ rad/s, à la limite de la stabilité.

Réponse. a) $K > 3$ · b) $3 - 2\sqrt{2} < K < 3 + 2\sqrt{2}$ · c) oscillations amorties pour $3 < K < 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}828$; pour $K = 3$, les racines valent $\pm i\sqrt{2}$ et le système oscille indéfiniment.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : une étude complète

a) On calcule les puissances : $(1+2i)^2 = -3 + 4i$, $(1+2i)^3 = -11 - 2i$, $(1+2i)^4 = -7 - 24i$. Alors $P(1+2i)$ a pour partie réelle $-7 + 44 - 42 - 20 + 25 = 0$ et pour partie imaginaire $-24 + 8 + 56 - 40 = 0$.

b) Les coefficients étant réels, $1 - 2i$ est aussi racine, et P est divisible par $(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i) = z^2 - 2z + 5$. En identifiant $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + bz + c)$: $5c = 25$ et $b - 2 = -4$, d'où $c = 5$ et $b = -2$, ce que confirment les termes en z^2 ($c + 5 - 2b = 14$) et en z ($5b - 2c = -20$) :

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 5\right)^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les solutions sont $1+2i$ et $1-2i$, chacune double.

c) Il n'y a que deux points distincts, $A(1\,;2)$ et $B(1\,;-2)$, symétriques par rapport à l'axe des réels et distants de $AB = |4i| = 4$: il n'y a pas de quadrilatère, les quatre racines se confondant deux à deux. C'est le piège de l'énoncé : il faut vérifier la multiplicité avant de compter les points.

Réponse. a) $P(1+2i) = 0$ · b) $P(z) = \left(z^2 - 2z + 5\right)^2$, donc $S = \{1+2i\,;1-2i\}$, chacune **double** · c) seulement deux points distincts, symétriques par rapport à l'axe des réels et distants de 4 : il n'y a pas de quadrilatère.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).