

Plaquette 5 - Synthèse : relations coefficients-racines, démonstrations et modélisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes se factorise en

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

les z_k n'étant pas nécessairement distincts. Il admet donc exactement n racines comptées avec leur multiplicité.

Relations coefficients-racines. En développant la forme factorisée et en identifiant :

$$\sum_k z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \sum_{i < j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \prod_k z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Deux conséquences très utiles :

$$\sum_k z_k^2 = \left(\sum_k z_k \right)^2 - 2 \sum_{i < j} z_i z_j \quad \sum_k \frac{1}{z_k} = \frac{\sum_{i < j} z_i z_j}{\prod_k z_k}$$

Racines conjuguées. Si tous les coefficients sont **réels** et si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi, **avec la même multiplicité**. Conséquences :

- le nombre de racines non réelles est **pair** ;
- un polynôme réel de degré **impair** a donc au moins une racine réelle ;
- P se factorise sur $\mathbb{R}$ en produit de facteurs de degré 1 et de trinômes à discriminant négatif.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. Si $\frac{p}{q}$ est racine, écrite sous forme irréductible, alors p divise le terme constant a_0 et q divise le coefficient dominant a_n . C'est ce qui rend la recherche de racine évidente **finie**.

Polynôme minimal. Pour obtenir un polynôme à coefficients rationnels admettant un nombre donné pour racine, on multiplie entre eux les facteurs correspondant à **tous ses conjugués** — c'est ce qui fait disparaître les radicaux et les i .

Correction de l'exercice 1 - Degré impair et racine réelle

- **Hypothèses** : P est de degré n impair, à coefficients réels ✓
- **Premier outil** : d'Alembert-Gauss donne exactement n racines complexes, comptées avec multiplicité ✓
- **Second outil** : les coefficients sont réels, donc si z_0 est racine non réelle, $\overline{z_0}$ l'est aussi ✓
- **Point essentiel** : $z_0 \neq \overline{z_0}$ puisque z_0 n'est pas réel ✓
- **Conséquence** : les racines non réelles se regroupent **par paires** ✓
- **Précision** : une racine non réelle et sa conjuguée ont la même multiplicité ✓
- **Donc** : le nombre de racines non réelles, comptées avec multiplicité, est **pair** ✓
- **Décompte** : nombre de racines réelles = $n - (\text{nombre pair})$ ✓

- **Parité** : n est impair, donc ce décompte est impair ✓
- **Or un nombre impair n'est jamais nul** ✓
- **Conclusion** :

P admet au moins une racine réelle

- **Illustration en degré 3** : $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = (z - 3)(z^2 + 4)$ ✓
- **Racines** : 3 (réelle) et $\pm 2i$ (paire conjuguée) ✓
- **Contre-exemple en degré pair** : $P(z) = z^2 + 1$ ✓
- **Racines** : i et $-i$, aucune réelle ✓
- **Cohérence** : le nombre de racines non réelles vaut 2, qui est bien pair ✓
- **Autre contre-exemple** : $z^4 + 1$, dont les quatre racines sont non réelles ✓
- **Interprétation graphique** : la courbe d'une fonction polynôme de degré impair va de $-\infty$ à $+\infty$, elle coupe forcément l'axe des abscisses ✓
- **Lien** : c'est la lecture par le théorème des valeurs intermédiaires du même résultat ✓

Réponse. Les racines non réelles vont par paires conjuguées, donc leur nombre est pair ; un degré impair laisse donc un nombre impair — donc non nul — de racines réelles.
Contre-exemple en degré pair : $z^2 + 1$.

Correction de l'exercice 2 - Somme des inverses des racines

- **a) Repérage** : $a = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 11$, $a_0 = -6$ ✓
- **Somme** : $-\frac{-6}{1} = 6$ ✓
- **Somme des produits deux à deux** : $\frac{11}{1} = 11$ ✓
- **Produit** : $(-1)^3 \times \frac{-6}{1} = 6$ ✓
- **b) Mise au même dénominateur** :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3}$$

- **Numérateur** : c'est exactement la somme des produits deux à deux ✓
- **Substitution** : $\frac{11}{6}$ ✓
- **Résultat** :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{11}{6}$$

- **Validité** : aucune racine n'est nulle, puisque leur produit vaut $6 \neq 0$ ✓
- **c) Racine évidente** : $1 - 6 + 11 - 6 = 0$, donc 1 est racine ✓
- **Factorisation** : $(z - 1)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $-c = -6$, donc $c = 6$ ✓
- **Terme en z^2** : $b - 1 = -6$, donc $b = -5$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $c - b = 6 + 5 = 11$ ✓
- **Second facteur** : $z^2 - 5z + 6 = (z - 2)(z - 3)$ ✓
- **Racines** : 1, 2, 3 ✓
- **Vérification de la somme** : $1 + 2 + 3 = 6$ ✓
- **Vérification du produit** : $1 \times 2 \times 3 = 6$ ✓
- **Vérification des produits deux à deux** : $2 + 3 + 6 = 11$ ✓
- **Vérification de la somme des inverses** : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6 + 3 + 2}{6} = \frac{11}{6}$ ✓
- **Cohérence** : conforme au calcul du b), obtenu **sans** résoudre ✓

Réponse. a) somme 6, produits deux à deux 11, produit $6 \cdot \frac{11}{6}$. c) racines 1, 2, 3, et $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 3 - Somme des carrés sans résoudre

- **Repérage** : $a_4 = 1, a_3 = -2, a_2 = 7$ ✓
- **Somme des racines** : $-\frac{a_3}{a_4} = 2$ ✓
- **Somme des produits deux à deux** : $\frac{a_2}{a_4} = 7$ ✓
- **Identité à utiliser** :

$$\left(\sum z_k\right)^2 = \sum z_k^2 + 2 \sum_{i < j} z_i z_j$$

- **Justification** : on développe le carré d'une somme de quatre termes ✓
- **Détail** : le carré donne les quatre carrés, plus deux fois chacun des six produits ✓
- **On isole** : $\sum z_k^2 = \left(\sum z_k\right)^2 - 2 \sum_{i < j} z_i z_j$ ✓
- **Substitution** : $2^2 - 2 \times 7$ ✓
- **Calcul** : $4 - 14$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = -10$$

- **Le résultat est négatif** : c'est possible, les z_k ne sont pas tous réels ✓
- **Contrôle de plausibilité** : une somme de carrés de **réels** serait positive ✓
- **Conclusion partielle** : l'équation a donc au moins deux racines non réelles ✓
- **Vérification, par une factorisation** : $1 - 2 + 7 + 4 - 5 = 5 \neq 0$, 1 n'est pas racine ✓
- **Essai de -1** : $1 + 2 + 7 - 4 - 5 = 1 \neq 0$ ✓
- **Essai de 5** : $625 - 250 + 175 + 20 - 5 = 565 \neq 0$ ✓
- **Constat** : la recherche de racine évidente échoue, et c'est sans importance ✓
- **Force de la méthode** : les relations coefficients-racines donnent le résultat **sans** connaître les racines ✓
- **Extension** : le même procédé donne $\sum \frac{1}{z_k} = \frac{-a_1/a_4}{a_0/a_4} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ ✓

Réponse. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 2^2 - 2 \times 7 = -10$.

Correction de l'exercice 4 - Racine rationnelle d'un polynôme entier

- **Diviseurs du terme constant** : $p \in \{\pm 1; \pm 2\}$ ✓
- **Diviseurs du coefficient dominant** : $q \in \{1; 3\}$ ✓
- **Candidats** : $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$ ✓
- **Essai de 1** : $3 - 7 + 8 - 2 = 2 \neq 0$ ✓
- **Essai de 2** : $24 - 28 + 16 - 2 = 10 \neq 0$ ✓
- **Essai de $\frac{1}{3}$** : $3 \times \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$ ✓
- **Deuxième terme** : $-7 \times \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}$ ✓
- **Troisième terme** : $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$ ✓
- **Quatrième terme** : $-2 = -\frac{18}{9}$ ✓

- **Somme** : $\frac{1 - 7 + 24 - 18}{9} = 0 \checkmark$
- **Racine trouvée** : $\frac{1}{3} \checkmark$
- **Factorisation** : on choisit $3z - 1$ pour garder des coefficients entiers $\checkmark$
- **Forme** : $(3z - 1)(z^2 + bz + c) \checkmark$
- **Terme constant** : $-c = -2$, donc $c = 2 \checkmark$
- **Terme en z^2** : $3b - 1 = -7$, donc $b = -2 \checkmark$
- **Vérification sur le terme en z** : $3c - b = 6 + 2 = 8 \checkmark$
- **Factorisation** :

$$3z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = (3z - 1)(z^2 - 2z + 2)$$

- **Second facteur** : discriminant $4 - 8 = -4 \checkmark$
- **Solutions** : $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \checkmark$
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\langle \frac{1}{3}; 1 + i; 1 - i \right\rangle$$

- **Contrôle par la somme** : $\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$, et $-\frac{a_2}{a_3} = \frac{7}{3} \checkmark$
- **Contrôle par le produit** : $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, et $-\frac{a_0}{a_3} = \frac{2}{3} \checkmark$

Réponse. $S = \left\langle \frac{1}{3}; 1 + i; 1 - i \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 - Racines doubles d'une réciproque

- **Observation** : les coefficients 1, -2, 3, -2, 1 sont palindromes $\checkmark$
- **Nature** : équation réciproque $\checkmark$
- **Préalable** : 0 n'est pas solution $\checkmark$
- **On divise par z^2** : $z^2 - 2z + 3 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \checkmark$
- **Regroupement** : $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) + 3 = 0 \checkmark$
- **Changement d'inconnue** : $u = z + \frac{1}{z}$, avec $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2 \checkmark$
- **Équation en u** : $u^2 - 2 - 2u + 3 = 0 \checkmark$
- **Réduction** : $u^2 - 2u + 1 = 0 \checkmark$
- **Reconnaissance** : $(u - 1)^2 = 0 \checkmark$
- **Solution unique** : $u = 1$, racine double $\checkmark$
- **Retour à z** : $z + \frac{1}{z} = 1$, soit $z^2 - z + 1 = 0 \checkmark$
- **Discriminant** : $1 - 4 = -3 \checkmark$
- **Solutions** : $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Multiplicité** : u étant racine double, chaque z l'est aussi $\checkmark$
- **Confirmation par factorisation** :

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = (z^2 - z + 1)^2$$

- **Vérification par développement** : $(z^2 - z + 1)^2 = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \checkmark$
- **Détail du calcul** : le terme en z^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3 \checkmark$

— **Ensemble des solutions :**

$$S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

— **Comptage avec multiplicité :** $2 + 2 = 4$, conforme au degré ✓— **Modules :** $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ✓— **Cohérence :** dans une réciproque, les racines vont par paires de produit 1 ; ici chaque racine est de module 1 ✓

Réponse. $S = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$, chacune racine **double** : $P(z) = (z^2 - z + 1)^2$.

Correction de l'exercice 6 - Racines cubiques de $1 + i$ — **Forme exponentielle du second membre :** $|1 + i| = \sqrt{2}$ ✓— **Argument :** $\frac{\pi}{4}$ ✓— **Écriture :** $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓— **On pose :** $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ ✓— **Modules :** $r^3 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ✓— **Donc :** $r = 2^{\frac{1}{6}}$ ✓— **Valeur approchée :** $2^{1/6} \approx 1,122$ ✓— **Arguments :** $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ✓— **Donc :** $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ✓— **Trois valeurs :** $k = 0, 1, 2$ ✓— **Premier angle :** $\frac{\pi}{12}$ ✓— **Deuxième :** $\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ ✓— **Troisième :** $\frac{\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$ ✓— **Solutions :**

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})} \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

— **Une forme algébrique remarquable :** pour $k = 1$, l'angle vaut $\frac{3\pi}{4}$ ✓— **Valeurs :** $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓— **Résultat :** $z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i)$ ✓— **Simplification :** $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$, donc le coefficient vaut $2^{-\frac{1}{3}}$ ✓— **Vérification du module :** $2^{-\frac{1}{3}} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{6}}$ ✓— **Contrôle global :** le produit des trois solutions vaut $-(-1 - i) = 1 + i$ ✓— **Cohérence :** pour $z^3 - (1 + i)$, le produit des racines vaut $-\frac{a_0}{a_3} = 1 + i$ ✓

Réponse. $z_k = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})}$ pour $k = 0, 1, 2$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation de degré 6 sur le cercle unité

- **Changement d'inconnue** : $Z = z^3$ ✓
 - **Équation** : $Z^2 + Z + 1 = 0$ ✓
 - **Discriminant** : $1 - 4 = -3$ ✓
 - **Solutions en Z** : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ✓
 - **Modules de ces deux nombres** : $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ✓
 - **Arguments** : $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ ✓
 - **Formes exponentielles** : $Z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ✓
 - **Premier cas** : $z^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ✓
 - **Modules** : $r^3 = 1$, donc $r = 1$ ✓
 - **Arguments** : $3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ✓
 - **Trois angles** : $\frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$ ✓
 - **Second cas** : par conjugaison, les angles opposés ✓
 - **Trois angles** : $-\frac{2\pi}{9}, -\frac{8\pi}{9}, -\frac{14\pi}{9}$ ✓
 - **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{ e^{\pm i\frac{2\pi}{9}}; e^{\pm i\frac{8\pi}{9}}; e^{\pm i\frac{14\pi}{9}} \right\}$$
 - **Module** : tous valent 1, ce qui répond à la question ✓
 - **Démonstration directe, sans résoudre** : le produit des six racines vaut $\frac{a_0}{a_6} = 1$ ✓
 - **Argument plus fin** : de $Z^2 + Z + 1 = 0$ on tire $|Z| = 1$, car Z est de module 1 ✓
 - **Justification** : le produit des deux Z vaut 1 et ils sont conjugués ✓
 - **Puis** : $|z^3| = |z|^3 = |Z| = 1$ ✓
 - **Donc** : $|z| = 1$ pour toute solution ✓
 - **Remarque de structure** : $z^6 + z^3 + 1 = \frac{z^9 - 1}{z^3 - 1}$ ✓
 - **Conséquence** : les solutions sont les racines neuvièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques ✓
 - **Comptage** : $9 - 3 = 6$, conforme au degré ✓
- Réponse.** $S = \left\{ e^{\pm i\frac{2\pi}{9}}; e^{\pm i\frac{8\pi}{9}}; e^{\pm i\frac{14\pi}{9}} \right\}$: les racines neuvièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques, toutes de module 1.

Correction de l'exercice 8 - Un polynôme à coefficients rationnels

- **Première idée** : isoler le radical ✓
- **On pose** : $z = \sqrt{2} + i$, donc $z - i = \sqrt{2}$ ✓
- **On élève au carré** : $z^2 - 2iz - 1 = 2$ ✓
- **Équation obtenue** : $z^2 - 2iz - 3 = 0$ ✓
- **Problème** : le coefficient $-2i$ n'est pas entier ✓
- **Méthode correcte** : faire intervenir **tous** les conjugués ✓
- **Les conjugués de $\sqrt{2} + i$** : on change le signe de i , puis celui de $\sqrt{2}$ ✓
- **Liste** : $\sqrt{2} + i, \sqrt{2} - i, -\sqrt{2} + i, -\sqrt{2} - i$ ✓

- **Premier regroupement** : $(z - \sqrt{2} - i)(z - \sqrt{2} + i) \checkmark$
- **Produit** : $(z - \sqrt{2})^2 + 1 = z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 \checkmark$
- **Second regroupement** : $(z + \sqrt{2})^2 + 1 = z^2 + 2\sqrt{2}z + 3 \checkmark$
- **Produit des deux** : $(z^2 + 3)^2 - (2\sqrt{2}z)^2 \checkmark$
- **Développement** : $z^4 + 6z^2 + 9 - 8z^2 \checkmark$
- **Polynôme obtenu** :

$$P(z) = z^4 - 2z^2 + 9$$
- **Coefficients** : 1, 0, -2, 0, 9 — tous entiers $\checkmark$
- **Vérification** : $(\sqrt{2} + i)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} - 1 = 1 + 2i\sqrt{2} \checkmark$
- **Puissance quatrième** : $(1 + 2i\sqrt{2})^2 = 1 + 4i\sqrt{2} - 8 = -7 + 4i\sqrt{2} \checkmark$
- **Calcul complet** : $-7 + 4i\sqrt{2} - 2(1 + 2i\sqrt{2}) + 9 \checkmark$
- **Parties réelles** : $-7 - 2 + 9 = 0 \checkmark$
- **Parties imaginaires** : $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0 \checkmark$
- **Minimalité** : un polynôme entier annulant $\sqrt{2} + i$ annule aussi ses trois conjugués, il est donc de degré au moins 4 $\checkmark$

Réponse. $P(z) = z^4 - 2z^2 + 9$, de degré 4 (minimal), de racines $\pm\sqrt{2} \pm i$.

Correction de l'exercice 9 - Une équation fonctionnelle

- **Forme générale** : $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0 \checkmark$
- **Calcul de $P(z + 1)$** : $a(z + 1)^2 + b(z + 1) + c \checkmark$
- **Développement** : $a(z^2 + 2z + 1) + bz + b + c \checkmark$
- **Expression** : $az^2 + 2az + a + bz + b + c \checkmark$
- **Différence** : on soustrait $az^2 + bz + c \checkmark$
- **Les termes en z^2 disparaissent** $\checkmark$
- **Les termes en bz disparaissent aussi** $\checkmark$
- **Reste** : $2az + a + b \checkmark$
- **Équation à résoudre** :

$$2az + a + b = z \quad \text{pour tout } z$$
- **Identification du coefficient de z** : $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2} \checkmark$
- **Identification du terme constant** : $a + b = 0$, donc $b = -\frac{1}{2} \checkmark$
- **Le coefficient c** : il n'apparaît pas dans la différence, il reste **libre** $\checkmark$
- **Solution générale** :

$$P(z) = \frac{z^2 - z}{2} + c \quad c \in \mathbb{C}$$

- **Vérification** : $P(z + 1) - P(z) = \frac{(z + 1)^2 - (z + 1) - z^2 + z}{2} \checkmark$
- **Numérateur** : $z^2 + 2z + 1 - z - 1 - z^2 + z = 2z \checkmark$
- **Quotient** : $z \checkmark$
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite $\checkmark$
- **Interprétation** : avec $c = 0$, $P(n) = \frac{n(n - 1)}{2} = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) \checkmark$

- **Lien** : P est la « primitive discrète » de l'identité ✓
- **Contrôle** : $P(5) = 10 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$ ✓

Réponse. $P(z) = \frac{z^2 - z}{2} + c$, avec c quelconque.

Correction de l'exercice 10 - Un triangle équilatéral

- **Forme exponentielle** : $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ ✓
- **Modules** : $r^3 = 8$, donc $r = 2$ ✓
- **Arguments** : $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ✓
- **Trois angles** : $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ ✓
- **Premières formes algébriques** : $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$ ✓
- **Deuxième** : $-\sqrt{3} + i$ ✓
- **Troisième** : $2 \times (-i) = -2i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i\}$$

- **Triangle équilatéral, première justification** : les trois points sont sur le cercle de rayon 2 ✓
- **Seconde justification** : leurs arguments sont espacés de $\frac{2\pi}{3}$ exactement ✓
- **Conclusion** : les trois points partagent le cercle en trois arcs égaux ✓
- **Calcul d'un côté** : $|(\sqrt{3} + i) - (-\sqrt{3} + i)| = |2\sqrt{3}|$ ✓
- **Longueur** : $c = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ ✓
- **Vérification avec un autre côté** : $|(\sqrt{3} + i) - (-2i)| = |\sqrt{3} + 3i|$ ✓
- **Module** : $\sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ✓
- **Cohérence** : les côtés sont bien égaux ✓
- **Formule générale** : $c = 2R \sin \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ✓
- **Aire d'un triangle équilatéral** : $A = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{12\sqrt{3}}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$$A = 3\sqrt{3} \approx 5,196$$

- **Contrôle de plausibilité** : l'aire du disque circonscrit vaut $4\pi \approx 12,57$ ✓

Réponse. $S = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i\}$; triangle équilatéral de côté $2\sqrt{3}$ et d'aire $3\sqrt{3} \approx 5,196$.

Correction de l'exercice 11 - Centre de gravité des racines

- **a) Repérage** : le coefficient de z^2 est **nul** ✓
- **Relation du cours** : $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ ✓
- **Application** : $-\frac{0}{1} = 0$ ✓
- **Somme des racines** :

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

— **Affixe du centre de gravité** : pour trois points M_1, M_2, M_3 ,

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

— **Substitution** : $\frac{0}{3} = 0$ ✓

— **Conclusion** : G est le point d'affixe 0, c'est-à-dire l'**origine** ✓

— **Illustration** : $z^3 - 1 = 0$ a pour racines les trois racines cubiques de l'unité ✓

— **Somme** : $1 + j + j^2 = 0$ ✓

— **Cohérence** : leur centre de gravité est bien O ✓

— **Autre illustration** : $z^3 - 3z + 2$ a pour racines 1, 1, -2 ✓

— **Somme** : 0 ✓

— **Cohérence** : conforme, même avec une racine double ✓

— **b) Nouveau coefficient** : $a_2 = 2$ ✓

— **Somme des racines** : $-\frac{2}{1} = -2$ ✓

— **Affixe du centre de gravité** : $-\frac{2}{3}$ ✓

— **Conclusion** : G n'est plus l'origine, mais le point d'affixe

$$z_G = -\frac{2}{3}$$

— **Position** : sur l'axe des réels, à gauche de l'origine ✓

— **Règle générale** : pour un polynôme unitaire de degré n , $z_G = -\frac{a_{n-1}}{n}$ ✓

— **Conséquence pratique** : annuler le terme en z^{n-1} revient à **centrer** les racines ✓

— **Technique classique** : le changement $z = w - \frac{a_{n-1}}{n}$ supprime ce terme, c'est la première étape de la résolution de Cardan ✓

Réponse. a) la somme des racines vaut 0, donc $z_G = 0$ · b) non : $z_G = -\frac{2}{3}$. En général, $z_G = -\frac{a_{n-1}}{n}$ pour un polynôme unitaire.

Correction de l'exercice 12 - Trois racines de module 1

— **a) Relation du produit** : $z_1 z_2 z_3 = (-1)^3 \times \frac{c}{1} = -c$ ✓

— **Passage au module** : $|z_1| |z_2| |z_3| = |c|$ ✓

— **Hypothèse** : chaque module vaut 1 ✓

— **Résultat** :

$$|c| = 1$$

— **b) Relation de la somme** : $z_1 + z_2 + z_3 = -a$ ✓

— **Passage au module** : $|a| = |z_1 + z_2 + z_3|$ ✓

— **Inégalité triangulaire** : elle se généralise à trois termes ✓

— **Majoration** : $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ✓

— **Substitution** : $1 + 1 + 1 = 3$ ✓

— **Conclusion** :

$$|a| \leq 3$$

— **Même travail pour b** : $b = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ ✓

— **Module de chaque produit** : $1 \times 1 = 1$ ✓

- **Inégalité triangulaire** : $|b| \leq 1 + 1 + 1 = 3$ ✓
- **c) Cas d'égalité** : il faut que les trois racines aient le **même argument** ✓
- **Et comme elles sont de module 1** : elles doivent être **égales** ✓
- **Exemple le plus simple** : les trois racines valent 1 ✓
- **Polynôme correspondant** : $(z - 1)^3$ ✓
- **Développement** : $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ ✓
- **Lecture** : $a = -3$, donc $|a| = 3$ ✓
- **Contrôle** : $b = 3$, donc $|b| = 3$ également ✓
- **Contrôle** : $c = -1$, donc $|c| = 1$ ✓
- **Cohérence** : les trois conclusions sont vérifiées simultanément ✓
- **Autre exemple** : $(z - i)^3 = z^3 - 3iz^2 - 3z + i$, avec $|a| = 3$ ✓

Réponse. a) $|c| = 1$ · b) par l'inégalité triangulaire, $|a| \leq 3$ et $|b| \leq 3$ · c)

$$(z - 1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1.$$

Correction de l'exercice 13 - Reconstituer un polynôme réel

- **Comptage** : trois racines annoncées pour un degré 4 ✓
- **Racine manquante** : les coefficients sont réels, donc $\overline{1 + i\sqrt{2}} = 1 - i\sqrt{2}$ est racine ✓
- **Les quatre racines** : 2, -1, $1 + i\sqrt{2}$, $1 - i\sqrt{2}$ ✓
- **Facteurs réels du premier degré** : $(z - 2)(z + 1)$ ✓
- **Produit** : $z^2 - z - 2$ ✓
- **Facteur associé à la paire conjuguée** :

$$(z - 1 - i\sqrt{2})(z - 1 + i\sqrt{2}) = (z - 1)^2 + 2$$

- **Développement** : $z^2 - 2z + 1 + 2 = z^2 - 2z + 3$ ✓
- **Contrôle** : la somme de cette paire vaut 2, et $-\frac{b}{a} = 2$ ✓
- **Contrôle du produit** : $1 + 2 = 3$ ✓
- **Forme factorisée** :

$$P(z) = (z^2 - z - 2)(z^2 - 2z + 3)$$

- **Développement, terme en z^4** : z^4 ✓
- **Terme en z^3** : $-2z^3 - z^3 = -3z^3$ ✓
- **Terme en z^2** : $3z^2 + 2z^2 - 2z^2 = 3z^2$ ✓
- **Terme en z** : $-3z + 4z = z$ ✓
- **Terme constant** : -6 ✓
- **Forme développée** :

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 + z - 6$$

- **Vérification sur $z = 2$** : $16 - 24 + 12 + 2 - 6 = 0$ ✓
- **Vérification sur $z = -1$** : $1 + 3 + 3 - 1 - 6 = 0$ ✓
- **Contrôle par la somme des racines** : $2 - 1 + 1 + 1 = 3$, et $-\frac{a_3}{a_4} = 3$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $2 \times (-1) \times 3 = -6$, et $(-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = -6$ ✓

Réponse. $P(z) = (z^2 - z - 2)(z^2 - 2z + 3) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 + z - 6.$

Correction de l'exercice 14 - Un correcteur de boucle de régulation

- **a) Cas des racines réelles** : leur somme vaut $3 - K$ et leur produit 2 ✓
- **Produit positif** : les deux racines sont de **même signe** ✓
- **Pour qu'elles soient négatives** : il faut que leur somme le soit ✓
- **Condition** : $3 - K < 0$, soit $K > 3$ ✓
- **Cas des racines complexes conjuguées** : elles s'écrivent $\alpha \pm i\beta$ ✓
- **Leur somme** : $2\alpha = 3 - K$ ✓
- **Partie réelle** : $\alpha = \frac{3-K}{2}$ ✓
- **Condition de négativité** : $3 - K < 0$, soit $K > 3$ ✓
- **Conclusion commune aux deux cas** :

le système est stable si et seulement si $K > 3$

- **b) Condition d'oscillation** : $\Delta < 0$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = (K - 3)^2 - 8$ ✓
- **Inéquation** : $(K - 3)^2 < 8$ ✓
- **Racine carrée** : $|K - 3| < 2\sqrt{2}$ ✓
- **Encadrement** : $3 - 2\sqrt{2} < K < 3 + 2\sqrt{2}$ ✓
- **Valeurs approchées** : $0,172 < K < 5,828$ ✓
- **c) Intersection des deux conditions** : $K > 3$ et $K < 3 + 2\sqrt{2}$ ✓
- **Plage cherchée** :

$$3 < K < 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,828$$

- **Interprétation** : le moteur rejoint sa consigne en oscillant, avec des oscillations qui s'amortissent ✓
- **Au-delà de $3 + 2\sqrt{2}$** : les racines redeviennent réelles négatives, régime **apériodique** ✓
- **Conséquence** : retour sans dépassement, mais plus lent ✓
- **Cas $K = 3$** : le coefficient de r s'annule ✓
- **Équation** : $r^2 + 2 = 0$, donc $r = \pm i\sqrt{2}$ ✓
- **Partie réelle** : nulle ✓
- **Conclusion** : le système oscille **indéfiniment**, sans s'amortir — c'est la limite de stabilité ✓
- **Pulsation de ces oscillations** : $\sqrt{2} \approx 1,414 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ✓
- **Règle de réglage** : on choisit K franchement supérieur à 3, sans dépasser $3 + 2\sqrt{2}$ si l'on accepte un léger dépassement ✓

Réponse. a) $K > 3$ · b) $3 - 2\sqrt{2} < K < 3 + 2\sqrt{2}$ · c) oscillations amorties pour $3 < K < 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,828$; pour $K = 3$, les racines valent $\pm i\sqrt{2}$ et le système oscille indéfiniment.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : une étude complète

- **a) Puissances** : $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ ✓
- **Cube** : $(-3 + 4i)(1 + 2i) = -3 - 6i + 4i - 8 = -11 - 2i$ ✓
- **Puissance quatrième** : $(-3 + 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$ ✓
- **Premier terme** : $-7 - 24i$ ✓
- **Deuxième** : $-4 \times (-11 - 2i) = 44 + 8i$ ✓
- **Troisième** : $14 \times (-3 + 4i) = -42 + 56i$ ✓

- **Quatrième** : $-20(1 + 2i) = -20 - 40i$ ✓
- **Cinquième** : 25 ✓
- **Somme des parties réelles** : $-7 + 44 - 42 - 20 + 25 = 0$ ✓
- **Somme des parties imaginaires** : $-24 + 8 + 56 - 40 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $P(1 + 2i) = 0$ ✓
- **b) Coefficients réels** : $1 - 2i$ est aussi racine ✓
- **Trinôme associé** : $z^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)z + |z_0|^2$ ✓
- **Calcul** : $z^2 - 2z + 5$ ✓
- **Forme cherchée** : $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + bz + c)$ ✓
- **Terme constant** : $5c = 25$, donc $c = 5$ ✓
- **Terme en z^3** : $b - 2 = -4$, donc $b = -2$ ✓
- **Vérification sur le terme en z^2** : $c + 5 - 2b = 5 + 5 + 4 = 14$ ✓
- **Vérification sur le terme en z** : $5b - 2c = -10 - 10 = -20$ ✓
- **Factorisation** :

$$P(z) = (z^2 - 2z + 5)^2$$

- **Conséquence** : $1 + 2i$ et $1 - 2i$ sont racines **doubles** ✓
 - **Ensemble des solutions** :
- $$S = \{1 + 2i; 1 - 2i\}$$
- **c) Images** : seulement **deux** points distincts, $A(1; 2)$ et $B(1; -2)$ ✓
 - **Conclusion** : il n'y a pas de quadrilatère, les quatre racines se confondent deux à deux ✓
 - **Description** : A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels ✓
 - **Distance** : $AB = |4i| = 4$ ✓
 - **Piège de l'énoncé** : compter quatre racines distinctes sans vérifier la multiplicité ✓

Réponse. a) $P(1 + 2i) = 0$ · b) $P(z) = (z^2 - 2z + 5)^2$, donc $S = \{1 + 2i; 1 - 2i\}$, chacune **double** · c) seulement deux points distincts, symétriques par rapport à l'axe des réels et distants de 4 : il n'y a pas de quadrilatère.