Plaquette 3 – Degré 3 : racine évidente, identification et factorisation complète

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Au-delà du second degré, il n'existe pas de formule à appliquer : on **abaisse le degré**. La méthode est toujours la même — trouver une racine (donnée par l'énoncé, évidente, ou fournie par le théorème des racines conjuguées), factoriser par le facteur correspondant, puis résoudre le trinôme qui reste. Le seul travail technique est l'**identification des coefficients**, qu'on contrôle systématiquement sur un terme non utilisé.

Exercice 1 – Les racines cubiques de l'unité par factorisation

Résoudre $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$ en factorisant $z^3 - 1$, sans utiliser la forme exponentielle.

Exercice 2 – Une somme de cubes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$ en factorisant.

Exercice 3 – Chercher la racine évidente

On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$. Trouver une racine réelle évidente, puis résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 – Une racine fractionnaire

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 - 3z^2 + 8z + 5 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle de la forme $\frac{p}{2}$ avec p entier.

Exercice 5 – Identification complète

Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout complexe z,

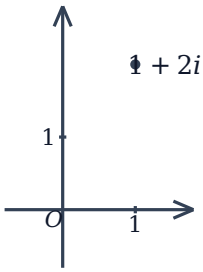
$$z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = (z - 1)\left(az^2 + bz + c\right)$$

puis résoudre l'équation $z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Retrouver deux coefficients

Déterminer les réels a et b pour que $1 + 2i$ soit racine de $P(z) = z^3 + az^2 + bz + 15$. Résoudre ensuite $P(z) = 0$.



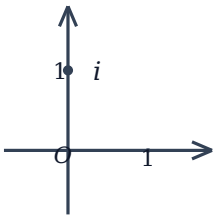
L'image de la racine imposée

Exercice 7 – Factoriser par un trinôme réel

On pose $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$.

a) Vérifier que i est racine de P, et en déduire une seconde racine.

b) Factoriser P par un trinôme à coefficients réels, puis résoudre $P(z) = 0$.



L'image de la racine i

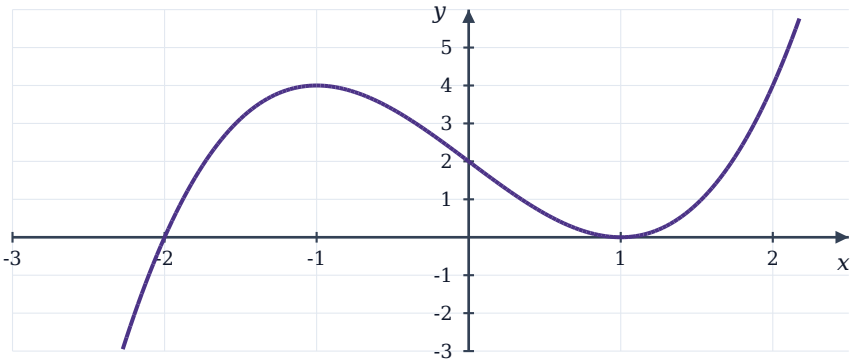
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Une racine double

On pose $P(z) = z^3 - 3z + 2$.

a) Vérifier que 1 est racine **double** de P.

b) Factoriser complètement P et résoudre $P(z) = 0$.



La courbe de $x \mapsto x^3 - 3x + 2$: elle est tangente à l'axe en 1

Exercice 9 – Degré 3 à coefficients complexes

On pose $P(z) = z^3 - (3 + i)z^2 + (2 + 3i)z - 2i$.

a) Vérifier que i est racine de P.

b) Le nombre $-i$ est-il racine ? Expliquer.

c) Factoriser P et résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 10 – Trois racines à trouver

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$.

Exercice 11 – Une équation réciproque

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

Indication : remarquer que 0 n'est pas solution, diviser par z^2, puis poser $u = z + \frac{1}{z}$.

Exercice 12 – Somme des carrés des racines

Soit z_1, z_2, z_3 les racines de $z^3 - 3z + 2 = 0$.

a) Sans les calculer, déterminer $z_1 + z_2 + z_3$ et $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

b) En déduire $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

c) Vérifier le résultat en utilisant les racines trouvées à l'exercice 8.

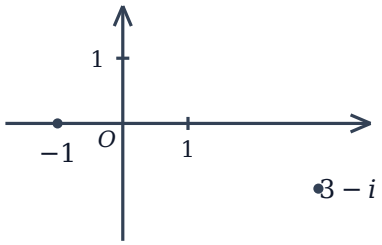
Exercice 13 – Factoriser sur R et sur C

Factoriser $z^6 - 1$ en produit de facteurs **irréductibles sur** $\mathbb{R}$, puis en produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Un polynôme à construire

Déterminer le polynôme P de degré 3, à coefficients réels, de coefficient dominant 2, admettant -1 pour racine et $3 - i$ pour racine. Donner sa forme développée.



Les deux racines imposées

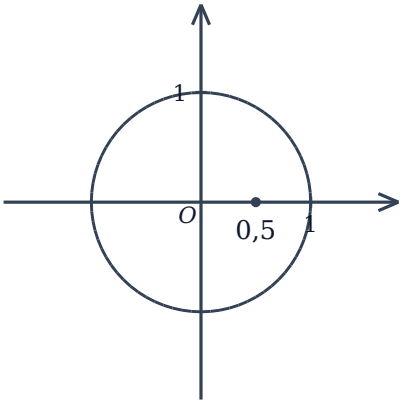
Exercice 15 – Stabilité d'un filtre numérique

En traitement du signal, un filtre numérique est décrit par un polynôme D dont les racines sont appelées les **pôles**. Le filtre est **stable** si et seulement si tous ses pôles ont un module **strictement inférieur à** 1.

a) Déterminer les pôles du filtre de dénominateur $D(z) = z^3 - 0{,}5z^2 + 0{,}36z - 0{,}18$, sachant que 0,5 est l'un d'eux. Le filtre est-il stable ?

b) Un second filtre a pour dénominateur $D_2(z) = z^3 - 1{,}2z^2 + z - 1{,}2$, dont 1,2 est un pôle. Conclure sur sa stabilité.

c) Que se passe-t-il physiquement pour un filtre instable ?



Le cercle unité : les pôles d'un filtre stable sont à l'intérieur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).