

**Plaquette 4 - Degré 4 et au-delà :
changements d'inconnue et équations $z^n = a$**

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Passé le degré 3, on ne cherche plus de racine au hasard : on **transforme** l'équation. Trois changements d'inconnue couvrent l'essentiel — $Z = z^2$ pour une bicarrée, $Z = z^3$ pour une équation en z^6 , $u = z + \frac{1}{z}$ pour une équation réciproque. Quand aucun ne s'applique, on revient à la forme exponentielle : toute équation $z^n = a$ se résout en une ligne. Le contrôle final est toujours le même : une équation de degré n doit livrer n solutions comptées avec leur multiplicité.

Exercice 1 - Bicarrée à solutions réelles

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 5z^2 + 4 = 0$.

Exercice 2 - Bicarrée à solutions imaginaires pures

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$.

Exercice 3 - Deux chemins pour la même équation

Résoudre $z^4 = 16$ dans $\mathbb{C}$, d'abord en factorisant, puis en passant par la forme exponentielle. Comparer les deux méthodes.

Exercice 4 - L'identité de Sophie Germain

- a) Vérifier que $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$.
- b) En déduire les solutions de $z^4 + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- c) Retrouver ces solutions par la forme exponentielle.

Exercice 5 - Une équation en z^3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

Exercice 6 - Racines cinquièmes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 32$. Donner les solutions sous forme exponentielle et préciser combien sont réelles.

Exercice 7 - Racines quatrièmes d'un complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Exercice 8 - Une réciproque avec racine double

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2z^3 - 6z^2 + 2z + 1 = 0$.

Exercice 9 - Translation d'inconnue

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 1)^4 = 16$, et décrire la position des images des solutions.

Exercice 10 - Une équation avec conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \bar{z}$, et compter les solutions.

Exercice 11 - Une bicarrée à paramètre

Soit m un réel. On considère l'équation $z^4 - (m + 2)z^2 + 2m = 0$.

- Déterminer m pour que i soit solution.
- Résoudre complètement l'équation pour cette valeur de m .

Exercice 12 - Un système somme-produit

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z + w = 4 \\ zw = 13 \end{cases}$, puis calculer $|z|$ et $|w|$.

Exercice 13 - Une racine commune

Déterminer les réels a pour lesquels les polynômes $P(z) = z^2 + az + 2$ et $Q(z) = z^2 + 2z + a$ ont **au moins une racine commune**.

Exercice 14 - Un degré 5 avec racines doubles

On pose $P(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + z - 2$.

- Vérifier que 2 est racine de P .
- Factoriser P complètement dans $\mathbb{C}$ et donner toutes les racines avec leur multiplicité.

Exercice 15 - Deux modes d'un système vibrant

Un système mécanique à deux masses couplées obéit à une équation différentielle d'ordre 4 dont l'équation caractéristique est

$$r^4 + 5r^2 + 4 = 0$$

Les solutions imaginaires pures $\pm i\omega$ correspondent à des **modes d'oscillation** de pulsation ω (en rad/s).

- Résoudre l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$.
- En déduire les deux pulsations propres, puis les périodes correspondantes.
- Le mouvement général est la superposition des deux modes. Au bout de combien de temps la configuration initiale se reproduit-elle exactement ?