Plaquette 4 – Degré 4 et au-delà : changements d'inconnue et équations z^n = a

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

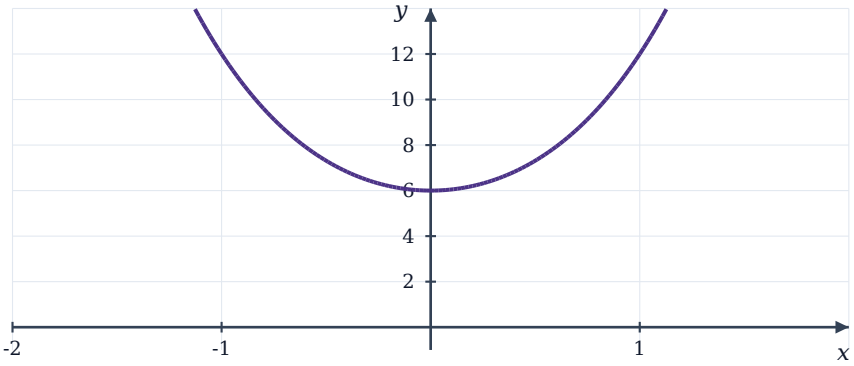
Passé le degré 3, on ne cherche plus de racine au hasard : on **transforme** l'équation. Trois changements d'inconnue couvrent l'essentiel — $Z = z^2$ pour une bicarrée, $Z = z^3$ pour une équation en z^6, $u = z + \frac{1}{z}$ pour une équation réciproque. Quand aucun ne s'applique, on revient à la forme exponentielle : toute équation $z^n = a$ se résout en une ligne. Le contrôle final est toujours le même : une équation de degré n doit livrer n solutions comptées avec leur multiplicité.

Exercice 1 – Bicarrée à solutions réelles

Résoudre dans ℂ l'équation $z^4 - 5z^2 + 4 = 0$.

Exercice 2 – Bicarrée à solutions imaginaires pures

Résoudre dans ℂ l'équation $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$.



La courbe de $x \mapsto x^4 + 5x^2 + 6$

Exercice 3 – Deux chemins pour la même équation

Résoudre $z^4 = 16$ dans ℂ, d'abord en factorisant, puis en passant par la forme exponentielle. Comparer les deux méthodes.

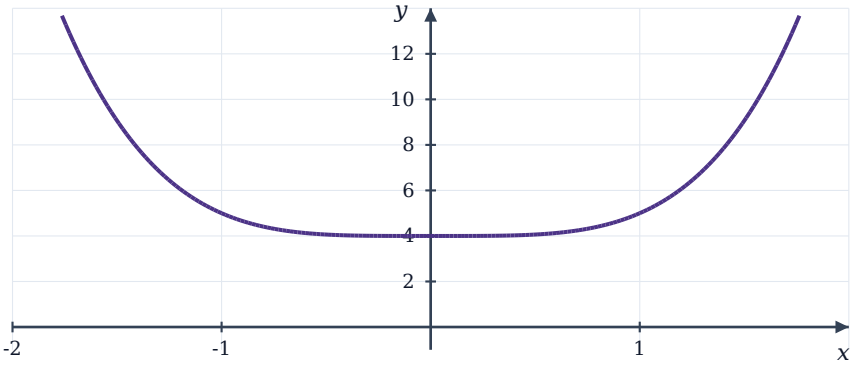
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – L'identité de Sophie Germain

a) Vérifier que $z^4 + 4 = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$.

b) En déduire les solutions de $z^4 + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

c) Retrouver ces solutions par la forme exponentielle.



La courbe de $x \mapsto x^4 + 4$

Exercice 5 – Une équation en z³

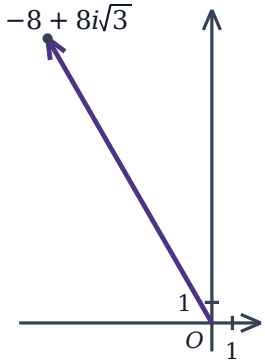
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

Exercice 6 – Racines cinquièmes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 32$. Donner les solutions sous forme exponentielle et préciser combien sont réelles.

Exercice 7 – Racines quatrièmes d'un complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.



Le second membre de l'équation

Exercice 8 – Une réciproque avec racine double

On pose $P(z) = z^4 + 2z^3 - 6z^2 + 2z + 1$, dont les coefficients se lisent dans les deux sens. En divisant $P(z)$ par z^2 et en posant $u = z + \frac{1}{z}$, déterminer toutes les racines de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

P et leur multiplicité.

Exercice 9 – Translation d'inconnue

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^4 = 16$, et décrire la position des images des solutions.

Exercice 10 – Une équation avec conjugué

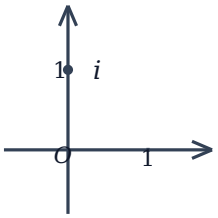
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \overline{z}$, et compter les solutions.

Exercice 11 – Une bicarrée à paramètre

Soit m un réel. On considère l'équation $z^4 - (m+2)z^2 + 2m = 0$.

a) Déterminer m pour que i soit solution.

b) Résoudre complètement l'équation pour cette valeur de m.



L'image de la solution imposée

Exercice 12 – Un système somme-produit

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z+w=4 \\ zw=13 \end{cases}$, puis calculer $|z|$ et $|w|$.

Exercice 13 – Une racine commune

Déterminer les réels a pour lesquels les polynômes $P(z) = z^2 + az + 2$ et $Q(z) = z^2 + 2z + a$ ont **au moins une racine commune**.

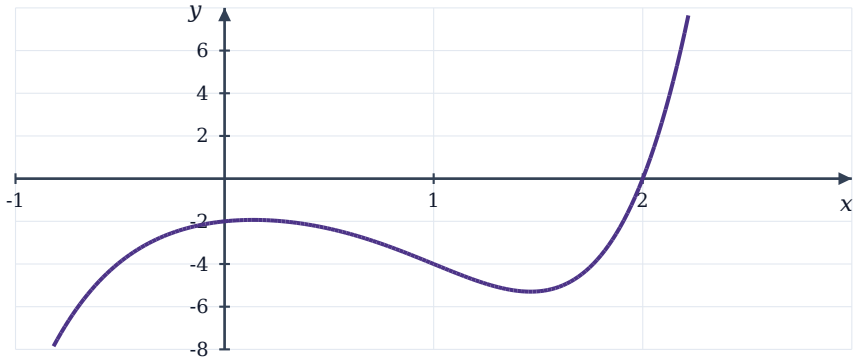
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Un degré 5 avec racines doubles

On pose $P(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + z - 2$.

a) Vérifier que 2 est racine de P.

b) Factoriser P complètement dans $\mathbb{C}$ et donner toutes les racines avec leur multiplicité.



La courbe de $x \mapsto P(x)$ ne coupe l'axe qu'une fois

Exercice 15 – Deux modes d’un système vibrant

Un système mécanique à deux masses couplées obéit à une équation différentielle d’ordre 4 dont l’équation caractéristique est

$$r^4 + 5r^2 + 4 = 0$$

Les solutions imaginaires pures $\pm i\omega$ correspondent à des **modes d’oscillation** de pulsation ω (en rad/s).

a) Résoudre l’équation caractéristique dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire les deux pulsations propres, puis les périodes correspondantes.

c) Le mouvement général est la superposition des deux modes. Au bout de combien de temps la configuration initiale se reproduit-elle exactement ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).