

Plaquette 2 - Second degré : discriminant, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Le second degré dans $\mathbb{C}$ se traite avec la formule connue depuis la Première, à un changement près : quand Δ est négatif, on n'écrit plus « pas de solution » mais $\sqrt{-\Delta}$ multiplié par i . Deux réflexes doivent devenir automatiques : les racines non réelles d'un polynôme à **coefficients réels** sont toujours **conjuguées** ; et tout trinôme se factorise en $a(z - z_1)(z - z_2)$, quel que soit le signe du discriminant. Les relations somme-produit servent partout de contrôle.

Exercice 1 - Discriminant négatif, cas de base

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 2 - Des racines à parties entières

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Exercice 3 - Quand a n'est pas égal à 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 - 2z + 1 = 0$.

Exercice 4 - Équations sans terme en z

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 + 4 = 0$, $z^2 = -7$ et $4z^2 + 9 = 0$.

Exercice 5 - Un coefficient irrationnel

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, puis donner le module et un argument de chaque solution.

Exercice 6 - Racine double et discriminant positif

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 - 6z + 9 = 0$ et $z^2 - 5z + 6 = 0$. Que constate-t-on par rapport à une résolution dans $\mathbb{R}$?

Exercice 7 - Factoriser un trinôme dans $\mathbb{C}$

Factoriser $P(z) = z^2 + 2z + 5$ dans $\mathbb{C}$, et vérifier la factorisation en développant.

Exercice 8 - Reconstruire l'équation

- a) Déterminer une équation du second degré à coefficients réels dont les solutions sont $2 + 3i$ et $2 - 3i$.
- b) Même question pour les solutions i et $-2i$. Les coefficients sont-ils réels ?

Expliquer.

Exercice 9 - Retrouver les coefficients

Un polynôme $P(z) = z^2 + az + b$, à coefficients **réels**, admet $1 - i$ pour racine. Déterminer a et b , puis l'autre racine.

Exercice 10 - Une racine imaginaire pure en degré 3

On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 + 9z - 18$.

- Vérifier que $3i$ est racine de P .
- En déduire une autre racine sans calcul.
- Factoriser complètement P et résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 11 - Second degré à coefficients complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$.

Exercice 12 - Discussion selon un paramètre

Soit m un réel. On considère l'équation $z^2 + mz + 1 = 0$.

- Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle deux solutions non réelles ?
- Dans ce cas, démontrer que les deux solutions ont pour module 1.

Exercice 13 - Somme et produit imposés

Déterminer les deux complexes dont la somme vaut 6 et le produit 34.

Exercice 14 - Une équation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

Exercice 15 - Oscillations amorties d'une suspension

Le mouvement vertical d'une masse suspendue à un ressort amorti obéit à l'équation différentielle $y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$, dont on cherche les solutions de la forme $y(t) = e^{rt}$. Le réel r doit alors vérifier l'**équation caractéristique**

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

On donne $\lambda = 1 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_0 = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Résoudre l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$.
- On admet que le régime est dit **pseudo-périodique** lorsque les solutions ne sont pas réelles, la **pseudo-pulsation** étant alors la partie imaginaire positive. Donner la pseudo-pulsation, puis la pseudo-période, arrondie au millième de seconde.
- À quelle condition sur λ et ω_0 le régime est-il pseudo-périodique ? Que se passe-t-il si l'amortissement augmente trop ?