Plaquette 2 – Second degré : discriminant, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

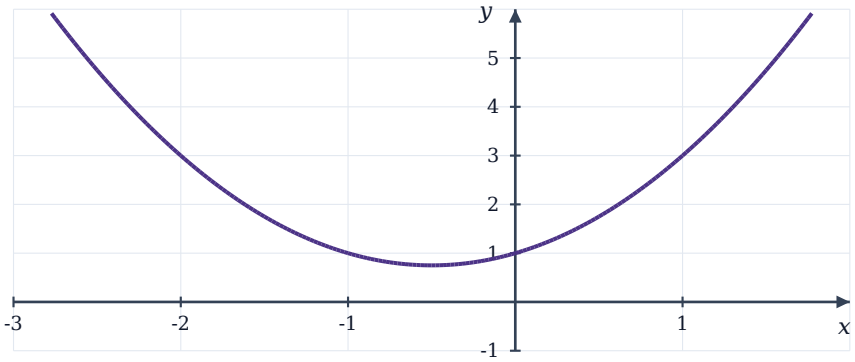
Exercices

Méthode

Le second degré dans $\mathbb{C}$ se traite avec la formule connue depuis la Première, à un changement près : quand Δ est négatif, on n'écrit plus « pas de solution » mais $\sqrt{-\Delta}$ multiplié par i. Deux réflexes doivent devenir automatiques : les racines non réelles d'un polynôme **à coefficients réels** sont toujours **conjuguées** ; et tout trinôme se factorise en $a(z-z_1)(z-z_2)$, quel que soit le signe du discriminant. Les relations somme-produit servent partout de contrôle.

Exercice 1 – Discriminant négatif, cas de base

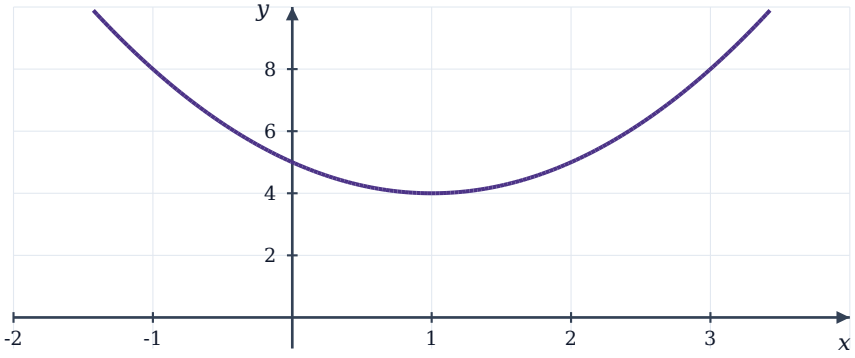
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.



La courbe de $x \mapsto x^2+x+1$ ne coupe pas l'axe des abscisses

Exercice 2 – Des racines à parties entières

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+5=0$.



La courbe de $x \mapsto x^2-2x+5$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Quand a n’est pas égal à 1

Résoudre dans ℂ l’équation $3z^2 - 2z + 1 = 0$.

Exercice 4 – Équations sans terme en z

Résoudre dans ℂ les équations $z^2 + 4 = 0$, $z^2 = -7$ et $4z^2 + 9 = 0$.

Exercice 5 – Un coefficient irrationnel

Résoudre dans ℂ l’équation $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$, puis donner le module et un argument de chaque solution.

Exercice 6 – Racine double et discriminant positif

Résoudre dans ℂ les équations $z^2 - 6z + 9 = 0$ et $z^2 - 5z + 6 = 0$. Que constate-t-on par rapport à une résolution dans ℝ ?

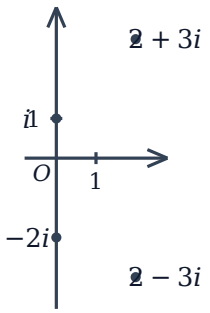
Exercice 7 – Factoriser un trinôme dans C

Factoriser $P(z) = z^2 + 2z + 5$ dans ℂ, et vérifier la factorisation en développant.

Exercice 8 – Reconstruire l’équation

a) Déterminer une équation du second degré à coefficients réels dont les solutions sont $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

b) Même question pour les solutions i et $-2i$. Les coefficients sont-ils réels ? Expliquer.

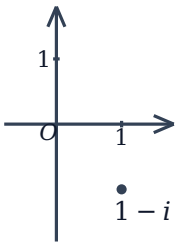


Les racines imposées au a) et au b)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Retrouver les coefficients

Un polynôme $P(z) = z^2 + az + b$, à coefficients **réels**, admet $1 - i$ pour racine.
Déterminer a et b, puis l'autre racine.



L'image de la racine connue

Exercice 10 – Une racine imaginaire pure en degré 3

On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 + 9z - 18$.

a) Vérifier que $3i$ est racine de P.

b) En déduire une autre racine sans calcul.

c) Factoriser complètement P et résoudre $P(z) = 0$.



L'image de la racine 3i

Exercice 11 – Second degré à coefficients complexes

Résoudre dans ℂ l'équation $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$.

Exercice 12 – Discussion selon un paramètre

Soit m un réel. On considère l'équation $z^2 + mz + 1 = 0$.

a) Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle deux solutions non réelles ?

b) Dans ce cas, démontrer que les deux solutions ont pour module 1.

Exercice 13 – Somme et produit imposés

Déterminer les deux complexes dont la somme vaut 6 et le produit 34.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Une équation bicarrée

On pose $P(z) = z^4 - 3z^2 - 4$. Écrire $P(z)$ comme un produit de quatre facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}$, puis en déduire les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice 15 – Oscillations amorties d'une suspension

Le mouvement vertical d'une masse suspendue à un ressort amorti obéit à l'équation différentielle $y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$, dont on cherche les solutions de la forme $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$. Le réel r doit alors vérifier l'**équation caractéristique**

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

On donne $\lambda = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ et $\omega_0 = 5\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

a) Résoudre l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$.

b) On admet que le régime est dit **pseudo-périodique** lorsque les solutions ne sont pas réelles, la **pseudo-pulsation** étant alors la partie imaginaire positive. Donner la pseudo-pulsation, puis la pseudo-période, arrondie au millième de seconde.

c) À quelle condition sur λ et ω_0 le régime est-il pseudo-périodique ? Que se passe-t-il si l'amortissement augmente trop ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).