

Plaquette 1 – Second degré, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On résout les équations du second degré dans $\mathbb{C}$ (y compris à coefficients complexes), on exploite le fait que les racines non réelles d'un polynôme à **coefficients réels** sont conjuguées, on factorise, et on résout des équations de degré supérieur par changement d'inconnue ou racine évidente.

Exercice 1 - Discriminant négatif

Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $z^2 + z + 1 = 0$ · b) $2z^2 - 4z + 5 = 0$.

Exercice 2 - Racine double

Résoudre $z^2 - 6z + 9 = 0$ et factoriser le polynôme.

Exercice 3 - Factoriser à partir des racines

Soit $P(z) = z^2 - 2z + 10$.

- a) Résoudre $P(z) = 0$.
- b) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.
- c) P se factorise-t-il dans $\mathbb{R}$?

Exercice 4 - Racines conjuguées

Un polynôme P à coefficients **réels** de degré 2 admet $2 - 5i$ pour racine.

- a) Donner l'autre racine.
- b) Déterminer P sachant que son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 5 - Coefficients complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$.

(On pourra chercher une racine évidente parmi les entiers.)

Exercice 6 - Équation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

Exercice 7 - Degré 3 avec racine évidente

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$.

- a) Montrer que 2 est racine de P .
- b) Factoriser $P(z)$ sous la forme $(z - 2)Q(z)$.
- c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 - Degré 3 : identification complète

Soit $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$.

- Montrer que 3 est racine.
- Factoriser et résoudre dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9 - Somme et produit imposés

Déterminer deux nombres complexes dont la somme vaut 6 et le produit 13.

Exercice 10 - Racines n-ièmes

Résoudre $z^4 = 16$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 - Équation avec conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z + 2\bar{z} = 3 - i$.

Exercice 12 - Équation de degré 4 à racines conjuguées

Soit $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.

- Factoriser P à l'aide d'une identité remarquable.
- Résoudre $P(z) = 0$ et préciser la multiplicité des racines.

Exercice 13 - Synthèse : étude complète

Soit $P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i$.

- Vérifier que i est racine de P .
- Déterminer a et b tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
- Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.