Plaquette 1 – Second degré, racines conjuguées et factorisation

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

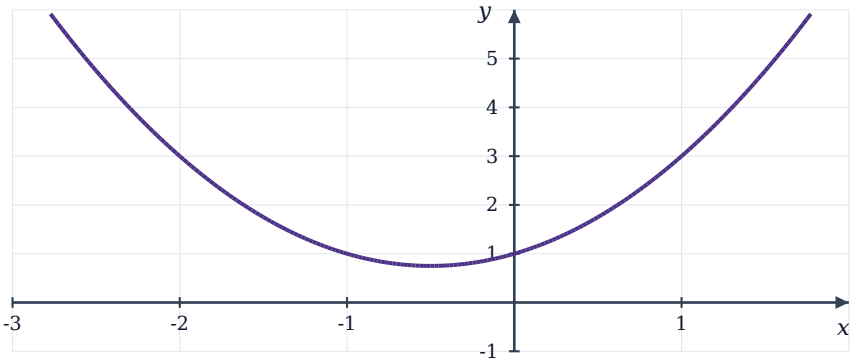
Exercices

Méthode

On résout les équations du second degré dans ℂ (y compris à coefficients complexes), on exploite le fait que les racines non réelles d'un polynôme **à coefficients réels** sont conjuguées, on factorise, et on résout des équations de degré supérieur par changement d'inconnue ou racine évidente.

Exercice 1 – Discriminant négatif

Résoudre dans ℂ : a) $z^2 + z + 1 = 0$ · b) $2z^2 - 4z + 5 = 0$.



La courbe de $x \mapsto x^2 + x + 1$

Exercice 2 – Racine double

Résoudre $z^2 - 6z + 9 = 0$ et factoriser le polynôme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

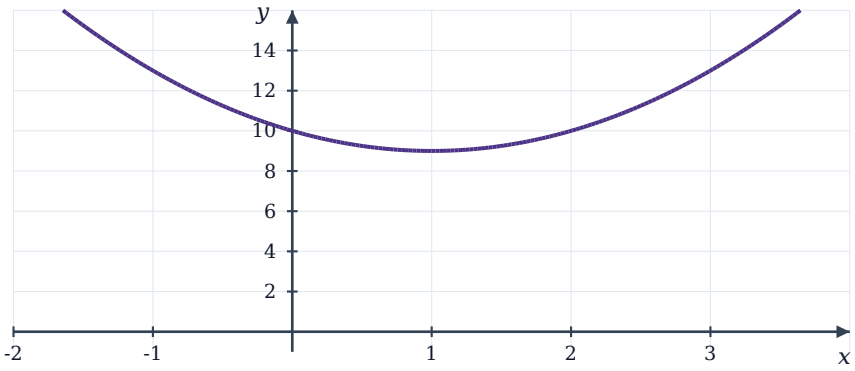
Exercice 3 – Factoriser à partir des racines

Soit $P(z) = z^2 - 2z + 10$.

a) Résoudre $P(z) = 0$.

b) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

c) P se factorise-t-il dans $\mathbb{R}$?



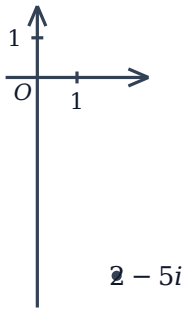
La courbe de $x \mapsto x^2 - 2x + 10$

Exercice 4 – Racines conjuguées

Un polynôme P à coefficients **réels** de degré 2 admet $2 - 5i$ pour racine.

a) Donner l'autre racine.

b) Déterminer P sachant que son coefficient dominant vaut 1.



L'image de la racine connue

Exercice 5 – Coefficients complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$.

(On pourra chercher une racine évidente parmi les entiers.)

Exercice 6 – Équation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Degré 3 avec racine évidente

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$.

a) Montrer que 2 est racine de P.

b) Factoriser $P(z)$ sous la forme $(z-2)Q(z)$.

c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 – Degré 3 : identification complète

Soit $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$.

a) Montrer que 3 est racine.

b) Factoriser et résoudre dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9 – Somme et produit imposés

Déterminer deux nombres complexes dont la somme vaut 6 et le produit 13.

Exercice 10 – Racines n-ièmes

Résoudre $z^4 = 16$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 – Équation avec conjugué

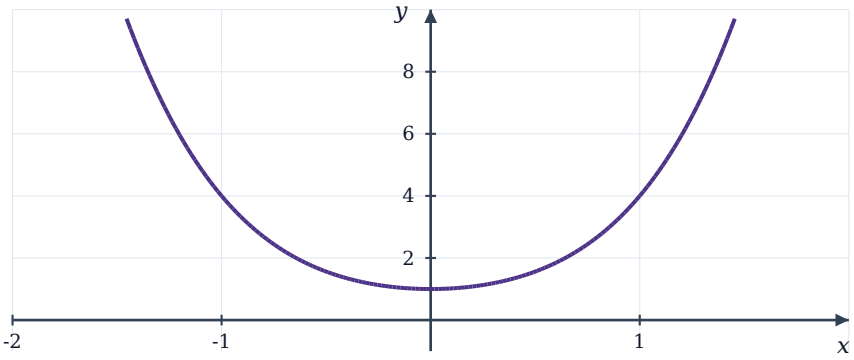
Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z + 2\overline{z} = 3 - i$.

Exercice 12 – Équation de degré 4 à racines conjuguées

Soit $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.

a) Factoriser P à l'aide d'une identité remarquable.

b) Résoudre $P(z) = 0$ et préciser la multiplicité des racines.



La courbe de $x \mapsto x^4 + 2x^2 + 1$

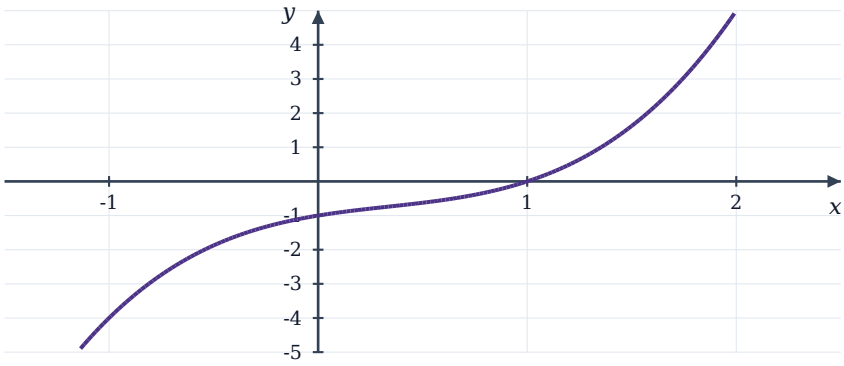
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Une racine lue sur la courbe

On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$.

a) Lire la racine réelle de f, puis la vérifier par le calcul.

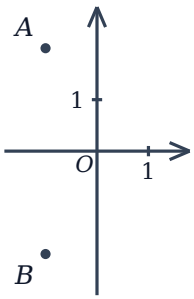
b) Factoriser $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ et résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.



La courbe de f ne coupe l'axe des abscisses qu'une fois

Exercice 14 – Retrouver un trinôme à partir de ses racines

Les points A et B ci-dessous sont les images des deux racines d'un trinôme unitaire $z^2 + bz + c$ à coefficients réels. Lire les affixes de A et B, puis déterminer b et c.



Les images des deux racines

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i$.

a) Vérifier que i est racine de P.

b) Déterminer a et b tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).