Plaquette 5 – Synthèse : relations coefficients-racines, démonstrations et modélisation

Équations polynomiales dans ℂ — Terminale maths expertes

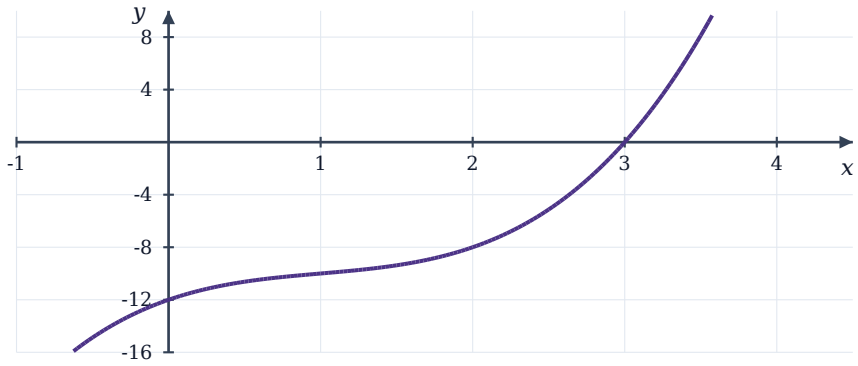
Exercices

Méthode

Dernière plaquette du chapitre. On y démontre plutôt qu'on n'y calcule : pourquoi un polynôme réel de degré impair a toujours une racine réelle, pourquoi les racines non réelles vont par paires, ce que les **relations coefficients-racines** permettent d'obtenir sans résoudre. Le fil conducteur est qu'une information sur les **coefficients** donne une information sur les **racines**, et réciproquement — c'est précisément ce dont on a besoin en physique, où les coefficients sont les réglages et les racines le comportement.

Exercice 1 – Degré impair et racine réelle

Démontrer que tout polynôme de degré **impair** à coefficients **réels** admet au moins une racine réelle. Donner ensuite un contre-exemple en degré pair.



Un exemple en degré 3 : la courbe de $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

Exercice 2 – Somme des inverses des racines

Soit z_1, z_2, z_3 les racines de $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$.

a) Donner, sans résoudre, leur somme, leur produit et la somme de leurs produits deux à deux.

b) En déduire $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.

c) Résoudre l'équation et vérifier.

Exercice 3 – Somme des carrés sans résoudre

Soit z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 4z - 5 = 0$. Calculer $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ sans résoudre l'équation.

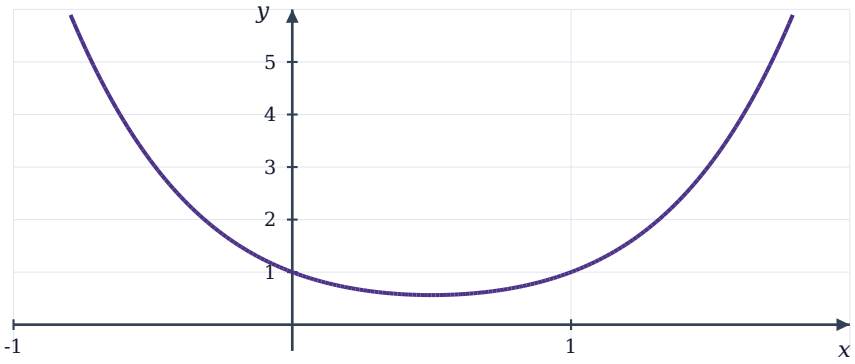
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Racine rationnelle d'un polynôme entier

Résoudre dans ℂ l'équation $3z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = 0$, en utilisant le fait qu'une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ vérifie « p divise -2 et q divise 3 ».

Exercice 5 – Racines doubles d'une réciproque

Résoudre dans ℂ l'équation $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = 0$, et préciser la multiplicité de chaque racine.



La courbe de $x \mapsto x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Exercice 6 – Racines cubiques de 1 + i

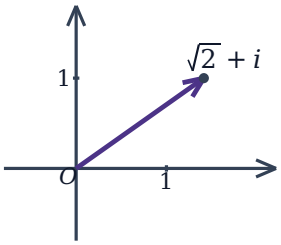
Résoudre dans ℂ l'équation $z^3 = 1 + i$, en donnant les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 7 – Une équation de degré 6 sur le cercle unité

Résoudre dans ℂ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$, et démontrer que toutes les solutions ont pour module 1.

Exercice 8 – Un polynôme à coefficients rationnels

Déterminer un polynôme unitaire à coefficients **entiers**, de degré minimal, admettant $\sqrt{2} + i$ pour racine.



L'image du nombre $\sqrt{2} + i$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Une équation fonctionnelle

Déterminer tous les polynômes P de degré 2 tels que, pour tout complexe z :
$P(z+1) - P(z) = z$.

Exercice 10 – Un triangle équilatéral

Résoudre $z^3 = 8i$ dans $\mathbb{C}$, puis démontrer que les images des solutions forment un triangle équilatéral et calculer son aire.

Exercice 11 – Centre de gravité des racines

Soit p et q deux réels, et z_1, z_2, z_3 les racines de $z^3 + pz + q = 0$.

a) Démontrer que le centre de gravité des images de z_1, z_2, z_3 est l'origine.

b) Le résultat reste-t-il vrai pour $z^3 + 2z^2 + pz + q$? Que devient alors le centre de gravité ?

Exercice 12 – Trois racines de module 1

Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, à coefficients complexes, dont les trois racines ont pour module 1.

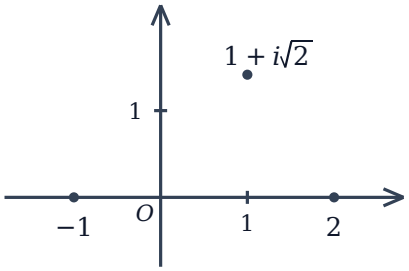
a) Que vaut $|c|$?

b) Démontrer que $|a| \leq 3$ et $|b| \leq 3$.

c) Donner un exemple où $|a| = 3$.

Exercice 13 – Reconstituer un polynôme réel

Déterminer le polynôme unitaire P, de degré 4, à coefficients réels, dont les racines sont 2, -1 et $1 + i\sqrt{2}$. Donner sa forme développée.



Les trois racines imposées

Exercice 14 – Un correcteur de boucle de régulation

Dans une boucle de régulation, le comportement d'un moteur asservi est décrit par l'équation caractéristique

$$r^2 + (K-3)r + 2 = 0$$

où $K > 0$ est le **gain** réglé par le technicien. Le système est **stable** lorsque les deux racines ont une partie réelle strictement négative, et il **oscille** lorsque les racines ne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sont pas réelles.

a) Pour quelles valeurs de K le système est-il stable ?

b) Pour quelles valeurs de K le système oscille-t-il ?

c) En déduire la plage de gains donnant un régime d'oscillations **amorties**. Que se passe-t-il pour $K = 3$?

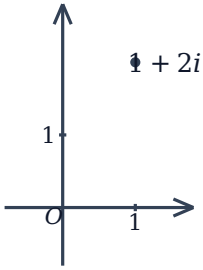
Exercice 15 – Bilan : une étude complète

On pose $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25$.

a) Vérifier que $1 + 2i$ est racine de P.

b) En déduire une factorisation de P par un trinôme réel, puis résoudre $P(z) = 0$.

c) Placer les images des solutions, et déterminer la nature du quadrilatère qu'elles forment.



L'image du nombre $1 + 2i$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).