

Plaquette 1 - Affixes, distances, angles et transformations

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— **Affixe** d'un point $M(x; y)$: $z_M = x + iy$. Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$.

— **Distance** : $AB = |z_B - z_A|$.

— **Milieu** de $[AB]$: affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

— **Angle orienté** :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

— **Critères** : en posant $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$,

— A, B, C alignés $\Leftrightarrow Z$ est **réel** ;

— $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow Z$ est **imaginaire pur**.

— **Ensembles de points** : $|z - z_0| = r$ est le **cercle** de centre d'affixe z_0 et de rayon r ; $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **médiatrice** de $[AB]$.

— **Transformations** (z' affixe de l'image) :

— translation de vecteur d'affixe b : $z' = z + b$;

— homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k réel : $z' - \omega = k(z - \omega)$;

— rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

— Triangle **équilatéral**, **isocèle**, **rectangle** : on compare les modules et l'argument du quotient.

Correction de l'exercice 1 - Affixes et distances

a) Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A = (4 - 1) + (-2 - 2)i = 3 - 4i$.

— $AB = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

b) $z_C - z_A = -3 - i$, donc $AC = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

— $z_C - z_B = -6 + 3i$, donc $BC = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

— Contrôle : le plus long côté est $BC \approx 6,7$, et $AB + AC \approx 5 + 3,16 = 8,16 > 6,7$: l'inégalité triangulaire est respectée.

Réponse. a) $3 - 4i$ et $AB = 5$ · b) $AC = \sqrt{10}$ et $BC = 3\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 2 - Milieu et parallélogramme

a) Milieu : $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$.

b) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_D$.

— Donc $z_D = z_C - z_B + z_A = (2 + 6i) - (5 + 3i) + (1 + i) = -2 + 4i$.

— Contrôle par les diagonales : le milieu de $[AC]$ a pour affixe $\frac{3 + 7i}{2}$, et celui de $[BD]$ vaut $\frac{3 + 7i}{2}$. Les diagonales ont bien le même milieu.

Réponse. a) $3 + 2i$ · b) $z_D = -2 + 4i$.

Correction de l'exercice 3 - Alignement

Critère du cours : les points sont alignés si et seulement si $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est **réel**.

— $z_C - z_A = 4 + 4i$ et $z_B - z_A = 2 + 2i$.

$$Z = \frac{4 + 4i}{2 + 2i} = \frac{4(1 + i)}{2(1 + i)} = 2$$

— $Z = 2$ est réel : les points A, B, C sont **alignés**.

— De plus $Z = 2$ signifie $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: le point B est le milieu de $[AC]$.

Réponse. Oui : $Z = 2$ est réel (et B est le milieu de $[AC]$).

Correction de l'exercice 4 - Orthogonalité

Critère du cours : $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est **imaginaire pur**.

— $z_C - z_A = -2 + 3i$ et $z_B - z_A = 3 + 2i$.

$$Z = \frac{-2 + 3i}{3 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(3 - 2i)}{9 + 4} = \frac{-6 + 4i + 9i + 6}{13} = \frac{13i}{13} = i$$

— $Z = i$ est **imaginaire pur** : les droites sont perpendiculaires.

— De plus $|Z| = 1$, donc $AC = AB$: le triangle est **rectangle isocèle en A**.

Réponse. Oui : $Z = i$, donc le triangle est même rectangle isocèle en A.

Correction de l'exercice 5 - Nature d'un triangle

On calcule les trois longueurs.

— $AB = |z_B - z_A| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

— $AC = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

— $BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.

— Les trois longueurs sont égales : le triangle est **équilatéral**.

— Remarque : z_A, z_B, z_C sont les racines cubiques de 8 (on vérifie $z^3 = 8$ pour chacune) ; leurs points images forment toujours un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. Un triangle équilatéral de côté $2\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 6 - Angle orienté

Formule du cours : l'angle vaut $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

— $z_C - z_A = 2i$ et $z_B - z_A = 2$.

$$Z = \frac{2i}{2} = i$$

— $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$: l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$, soit 90° .

— Géométriquement, $\overrightarrow{AB}$ est horizontal et $\overrightarrow{AC}$ vertical : c'est bien cohérent.

Réponse. $\frac{\pi}{2}$ (soit 90°).

Correction de l'exercice 7 - Ensemble de points : cercle

On réécrit la condition sous la forme $|z - z_0| = r$.

- $z - 2 + i = z - (2 - i)$, donc la condition s'écrit $|z - (2 - i)| = 3$.
- C'est la définition du **cercle** de centre Ω d'affixe $2 - i$ et de rayon 3.
- Vérification : le point d'affixe $5 - i$ vérifie $|5 - i - 2 + i| = |3| = 3$: il appartient bien à l'ensemble.
- **Piège fréquent** : le centre est $2 - i$, et non $2 + i$; on fait apparaître le signe « moins » avant de lire l'affixe du centre.

Réponse. Le cercle de centre d'affixe $2 - i$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 8 - Ensemble de points : médiatrice

On identifie deux points A et B :

- $|z - 1| = AM$ avec A d'affixe 1 ; $|z + 3i| = |z - (-3i)| = BM$ avec B d'affixe $-3i$.
- La condition $AM = BM$ caractérise la **médiatrice** du segment $[AB]$.
- Vérification algébrique avec $z = x + iy$: $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 3)^2$, ce qui donne $-2x + 1 = 6y + 9$, soit $2x + 6y + 8 = 0$, donc $x + 3y + 4 = 0$.
- C'est bien une **droite** : la médiatrice de $[AB]$.

Réponse. La médiatrice de $[AB]$, d'équation $x + 3y + 4 = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Translation et homothétie

- a) C'est une **translation** de vecteur d'affixe $2 - 3i$, c'est-à-dire de coordonnées $(2; -3)$.
- b) $z' = 3z$ s'écrit $z' - 0 = 3(z - 0)$: c'est une **homothétie** de centre l'origine et de rapport 3.
- c) C'est une homothétie de **centre** le point d'affixe 1 et de **rapport** 2.
- Rappel : dans une homothétie de rapport k , les longueurs sont multipliées par $|k|$ et les aires par k^2 .

Réponse. a) translation de vecteur $(2; -3)$ · b) homothétie de centre O , rapport 3 · c) homothétie de centre d'affixe 1, rapport 2.

Correction de l'exercice 10 - Rotation

a) Formule du cours : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec $\omega = 1 + i$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

$$z' - (1 + i) = i(z - (1 + i))$$

b) Pour $z_A = 3 + i$:

- $z_A - \omega = (3 + i) - (1 + i) = 2$.
- $i \times 2 = 2i$, donc $z' = 2i + (1 + i) = 1 + 3i$.
- Contrôle : $\Omega A = |2| = 2$ et $\Omega A' = |1 + 3i - 1 - i| = |2i| = 2$. La rotation conserve bien les distances au centre.

Réponse. a) $z' - (1 + i) = i(z - (1 + i))$ · b) l'image a pour affixe $1 + 3i$.

Correction de l'exercice 11 - Reconnaître une transformation

a) Un point fixe vérifie $z' = z$, soit $z = iz + 2$.

- $z - iz = 2$, donc $z(1 - i) = 2$ et

$$z = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$$

- Il y a bien un **unique** point fixe, d'affixe $\omega = 1 + i$.

b) On réécrit la transformation en faisant apparaître $\omega = 1 + i$.

- D'un côté : $z' - \omega = iz + 2 - (1 + i) = iz + 1 - i$.
- De l'autre : $i(z - \omega) = iz - i(1 + i) = iz - i + 1 = iz + 1 - i$.
- Les deux expressions sont **égales**, donc

$$z' - \omega = i(z - \omega)$$

- Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, c'est la **rotation** de centre d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. a) $\omega = 1 + i$ · b) rotation de centre $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Synthèse : configuration complète

a) $z_B - z_A = 3 + i$, donc $AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

— $z_C - z_A = -1 + 3i$, donc $AC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

— $z_C - z_B = -4 + 2i$, donc $BC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b) $Z = \frac{-1 + 3i}{3 + i} = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{9 + 1} = \frac{-3 + i + 9i + 3}{10} = \frac{10i}{10} = i$.

— Z est imaginaire pur, donc $(AB) \perp (AC)$; et $|Z| = 1$ donne $AC = AB$.

— Le triangle est **rectangle isocèle en A**.

— Contrôle par Pythagore : $AB^2 + AC^2 = 10 + 10 = 20 = BC^2$. Cohérent.

c) La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $z' = z + (z_B - z_A) = z + 3 + i$.

— Donc $z_D = (4i) + 3 + i = 3 + 5i$.

— Remarque : $ABDC$ est alors un parallélogramme — et même un **carré**, puisque le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

Réponse. a) $\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{5}$ · b) $Z = i$: rectangle isocèle en A · c) $z_D = 3 + 5i$.