Plaquette 1 – Affixes, distances, angles et transformations

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— **Affixe** d'un point $M(x\,;y)$: $z_M = x + iy$. Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$.

— **Distance** : $AB = |z_B - z_A|$.

— **Milieu** de $[AB]$: affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

— **Angle orienté** :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

— **Critères** : en posant $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$,

— A, B, C **alignés** $\Leftrightarrow$ Z est **réel** ;

— $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow$ Z est **imaginaire pur**.

— **Ensembles de points** : $|z - z_0| = r$ est le **cercle** de centre d'affixe z_0 et de rayon r ; $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **médiatrice** de $[AB]$.

— **Transformations** (z' affixe de l'image) :

— translation de vecteur d'affixe b : $z' = z + b$;

— homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k réel : $z' - \omega = k(z - \omega)$;

— rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ : $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$.

— Triangle **équilatéral**, **isocèle**, **rectangle** : on compare les modules et l'argument du quotient.

Correction de l'exercice 1 – Affixes et distances

a) Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A = (4 - 1) + (-2 - 2)i = 3 - 4i$.

— $AB = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

b) $z_C - z_A = -3 - i$, donc $AC = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

— $z_C - z_B = -6 + 3i$, donc $BC = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

— Contrôle : le plus long côté est $BC \approx 6{,}7$, et $AB + AC \approx 5 + 3{,}16 = 8{,}16 > 6{,}7$: l'inégalité triangulaire est respectée.

Réponse. a) $3 - 4i$ et $AB = 5$ · b) $AC = \sqrt{10}$ et $BC = 3\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 2 – Milieu et parallélogramme

a) Milieu : $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$.

b) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_D$.

— Donc $z_D = z_C - z_B + z_A = (2 + 6i) - (5 + 3i) + (1 + i) = -2 + 4i$.

— Contrôle par les diagonales : le milieu de $[AC]$ a pour affixe $\dfrac{3 + 7i}{2}$, et celui de $[BD]$ vaut $\dfrac{3 + 7i}{2}$. Les diagonales ont bien le même milieu.

Réponse. a) $3 + 2i$ · b) $z_D = -2 + 4i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Alignement

Critère du cours : les points sont alignés si et seulement si $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est **réel**.

— $z_C - z_A = 4 + 4i$ et $z_B - z_A = 2 + 2i$.

$$Z = \frac{4 + 4i}{2 + 2i} = \frac{4(1 + i)}{2(1 + i)} = 2$$

— $Z = 2$ est réel : les points A, B, C sont **alignés**.
— De plus $Z = 2$ signifie $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: le point B est le milieu de $[AC]$.

Réponse. Oui : $Z = 2$ est réel (et B est le milieu de $[AC]$).

Correction de l'exercice 4 – Orthogonalité

Critère du cours : $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est **imaginaire pur**.

— $z_C - z_A = -2 + 3i$ et $z_B - z_A = 3 + 2i$.

$$Z = \frac{-2 + 3i}{3 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(3 - 2i)}{9 + 4} = \frac{-6 + 4i + 9i + 6}{13} = \frac{13i}{13} = i$$

— $Z = i$ est **imaginaire pur** : les droites sont perpendiculaires.
— De plus $|Z| = 1$, donc $AC = AB$: le triangle est **rectangle isocèle en** A.

Réponse. Oui : $Z = i$, donc le triangle est même rectangle isocèle en A.

Correction de l'exercice 5 – Nature d'un triangle

On calcule les trois longueurs.

— $AB = |z_B - z_A| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
— $AC = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
— $BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.
— Les trois longueurs sont égales : le triangle est **équilatéral**.
— Remarque : z_A, z_B, z_C sont les racines cubiques de 8 (on vérifie $z^3 = 8$ pour chacune) ; leurs points images forment toujours un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. Un triangle équilatéral de côté $2\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Angle orienté

Formule du cours : l'angle vaut $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

— $z_C - z_A = 2i$ et $z_B - z_A = 2$.

$$Z = \frac{2i}{2} = i$$

— $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$: l'angle mesure $\dfrac{\pi}{2}$, soit 90°.
— Géométriquement, $\overrightarrow{AB}$ est horizontal et $\overrightarrow{AC}$ vertical : c'est bien cohérent.

Réponse. $\dfrac{\pi}{2}$ (soit 90°).

Correction de l'exercice 7 – Ensemble de points : cercle

On réécrit la condition sous la forme $|z - z_0| = r$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $z-2+i=z-(2-i)$, donc la condition s'écrit $|z-(2-i)|=3$.
— C'est la définition du **cercle** de centre Ω d'affixe $2-i$ et de rayon 3.
— Vérification : le point d'affixe $5-i$ vérifie $|5-i-2+i|=|3|=3$: il appartient bien à l'ensemble.
— **Piège fréquent** : le centre est $2-i$, et non $2+i$; on fait apparaître le signe « moins » avant de lire l'affixe du centre.

Réponse. Le cercle de centre d'affixe $2-i$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 8 – Ensemble de points : médiatrice

On identifie deux points A et B :

— $|z-1|=AM$ avec A d'affixe 1 ; $|z+3i|=|z-(-3i)|=BM$ avec B d'affixe $-3i$.
— La condition $AM=BM$ caractérise la **médiatrice** du segment $[AB]$.
— Vérification algébrique avec $z=x+iy$: $(x-1)^2+y^2=x^2+(y+3)^2$, ce qui donne $-2x+1=6y+9$, soit $2x+6y+8=0$, donc $x+3y+4=0$.
— C'est bien une **droite** : la médiatrice de $[AB]$.

Réponse. La médiatrice de $[AB]$, d'équation $x+3y+4=0$.

Correction de l'exercice 9 – Translation et homothétie

— a) C'est une **translation** de vecteur d'affixe $2-3i$, c'est-à-dire de coordonnées $(2\,;-3)$.
— b) $z'=3z$ s'écrit $z'-0=3(z-0)$: c'est une **homothétie** de centre l'origine et de rapport 3.
— c) C'est une homothétie de **centre** le point d'affixe 1 et de **rapport** 2.
— Rappel : dans une homothétie de rapport k, les longueurs sont multipliées par $|k|$ et les aires par k^2.

Réponse. a) translation de vecteur $(2\,;-3)$ · b) homothétie de centre O, rapport 3 · c) homothétie de centre d'affixe 1, rapport 2.

Correction de l'exercice 10 – Rotation

a) Formule du cours : $z'-\omega=\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$, avec $\omega=1+i$ et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$.

$$z'-(1+i)=i(z-(1+i))$$

b) Pour $z_A=3+i$:

— $z_A-\omega=(3+i)-(1+i)=2$.
— $i\times 2=2i$, donc $z'=2i+(1+i)=1+3i$.
— Contrôle : $\Omega A=|2|=2$ et $\Omega A'=|1+3i-1-i|=|2i|=2$. La rotation conserve bien les distances au centre.

Réponse. a) $z'-(1+i)=i(z-(1+i))$ · b) l'image a pour affixe $1+3i$.

Correction de l'exercice 11 – Reconnaître une transformation

a) Un point fixe vérifie $z'=z$, soit $z=iz+2$.

— $z-iz=2$, donc $z(1-i)=2$ et

$$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

— Il y a bien un **unique** point fixe, d'affixe $\omega=1+i$.

b) On réécrit la transformation en faisant apparaître $\omega=1+i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— D'un côté : $z' - \omega = iz + 2 - (1+i) = iz + 1 - i$.
— De l'autre : $i(z-\omega) = iz - i(1+i) = iz - i + 1 = iz + 1 - i$.
— Les deux expressions sont **égales**, donc

$$z' - \omega = i(z - \omega)$$

— Comme $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, c'est la **rotation** de centre d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. a) $\omega = 1 + i$ · b) rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Lire un angle et un rapport sur une figure

Le quotient $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_B}{z_A}$ a pour module $\frac{OB}{OA}$ et pour argument l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$. Ici

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $OB = OA$. Le triangle OAB est isocèle en O avec un angle de 60° au sommet : il est équilatéral. **Contrôle** : $OA = 2$, $OB = \sqrt{1+3} = 2$ et $AB = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$.

Réponse. $\frac{z_B}{z_A} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$: angle $\frac{\pi}{3}$, $OB = OA$, triangle OAB équilatéral.

Correction de l'exercice 13 – Image d'un triangle par une rotation

La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'écrit $z' = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$. On multiplie chaque affixe par i :

$$z_{A'} = i \qquad z_{B'} = 3i \qquad z_{C'} = i(1+2i) = -2 + i$$

Vérification : $A'B' = |3i - i| = 2 = |3 - 1| = AB$, ce qui est normal, une rotation conservant les distances. De même $A'C' = |-2| = 2 = AC$. Le triangle tourne d'un quart de tour autour de O : A et B, sur l'axe des réels, arrivent sur l'axe des imaginaires purs.

Réponse. $z_{A'} = i$, $z_{B'} = 3i$, $z_{C'} = -2 + i$; $A'B' = AB = 2$.

Correction de l'exercice 14 – Une homothétie de rapport négatif

L'homothétie de centre Ω et de rapport k s'écrit $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$:

$$z' - 1 = -2(z-1) \Leftrightarrow z' = -2z + 3$$

L'image de A a pour affixe $-2(2+i) + 3 = -1 - 2i$. **Vérification** : $z_{A'} - z_\Omega = -2 - 2i = -2(1+i) = -2(z_A - z_\Omega)$: les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A'}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ sont colinéaires, donc les trois points sont alignés, et A' est de l'autre côté de Ω, deux fois plus loin, puisque le rapport est négatif.

Réponse. $z' = -2z + 3$ et $z_{A'} = -1 - 2i$; $z_{A'} - z_\Omega = -2(z_A - z_\Omega)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : configuration complète

a) $z_B - z_A = 3 + i$, donc $AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
— $z_C - z_A = -1 + 3i$, donc $AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.
— $z_C - z_B = -4 + 2i$, donc $BC = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b) $Z = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{9+1} = \frac{-3+i+9i+3}{10} = \frac{10i}{10} = i$.

— Z est imaginaire pur, donc $(AB) \perp (AC)$; et $|Z| = 1$ donne $AC = AB$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le triangle est **rectangle isocèle en** A.

— Contrôle par Pythagore : $AB^2 + AC^2 = 10 + 10 = 20 = BC^2$. Cohérent.

c) La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $z' = z + (z_B - z_A) = z + 3 + i$.

— Donc $z_D = (4i) + 3 + i = 3 + 5i$.

— Remarque : $ABDC$ est alors un parallélogramme — et même un **carré**, puisque le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Réponse. a) $\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{5}$ · b) $Z = i$: rectangle isocèle en A · c) $z_D = 3 + 5i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).