Plaquette 2 – Angles orientés : alignement, orthogonalité et cocyclicité

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule centrale. Pour quatre points A, B, C, D avec $A \neq B$ et $C \neq D$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

Cas le plus utilisé : trois points A, B, C avec A comme sommet :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

Le module du même quotient donne un rapport de longueurs :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$$

Les trois tests à connaître. On pose $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

Z **est…**	**configuration**
réel non nul	A, B, C **alignés**
imaginaire pur	$(AB) \perp (AC)$
de module 1	$AB = AC$, triangle **isocèle** en A
égal à $\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	triangle **équilatéral**
égal à $\pm i$	triangle **rectangle isocèle** en A

Cocyclicité. Quatre points deux à deux distincts A, B, C, D sont **cocycliques ou alignés** si et seulement si leur **birapport** est réel :

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

C'est la traduction du théorème de l'angle inscrit : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ modulo π.

Triangle équilatéral direct. ABC est équilatéral **direct** si et seulement si

$$z_C - z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

Rappel de mesure. Un argument se lit modulo 2π pour un angle orienté de vecteurs, mais modulo π lorsqu'on parle de l'angle entre deux **droites**.

Correction de l'exercice 1 – Un angle et un rapport de longueurs

Le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ a pour module $\dfrac{AC}{AB}$ et pour argument l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Ici

$$Z = \frac{\left(2 + i\sqrt{3}\right) - 1}{3 - 1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc $\dfrac{AC}{AB} = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$: le triangle est isocèle en A avec un angle de 60° au sommet, il est donc équilatéral, et direct puisque l'angle est positif. **Contrôle** : $AB = 2$, $AC = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $BC = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $Z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{AC}{AB} = 1$: le triangle ABC est équilatéral (direct), de côté 2.

Correction de l'exercice 2 – Tester une orthogonalité

On calcule $z_B - z_A = 3 + i$ et $z_C - z_A = -1 + 3i$, puis le quotient en multipliant par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{10} = \frac{10i}{10} = i$$

Z est imaginaire pur, donc $(AB) \perp (AC)$: le triangle est rectangle en A. De plus $|Z| = 1$, donc $AC = AB$: il est rectangle isocèle en A. **Contrôle** : $AB = AC = \sqrt{10}$, $BC = |-4+2i| = \sqrt{20}$, et $10 + 10 = 20$.

Réponse. $Z = i$: le triangle est rectangle **et** isocèle en A, avec $AB = AC = \sqrt{10}$ et $BC = 2\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 3 – Tester un alignement

On a $z_B - z_A = 2 + 3i$ et $z_C - z_A = -2 - 3i$, l'opposé du précédent :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1$$

Ce quotient est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points sont alignés. Plus précisément, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$: A est le milieu de $[BC]$. **Contrôle** : $\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i = z_A$. Un quotient réel négatif place A entre B et C ; un quotient réel positif le placerait à l'extérieur du segment.

Réponse. $Z = -1$, réel : les points sont alignés, et A est le **milieu** de $[BC]$.

Correction de l'exercice 4 – Angle entre deux droites

$z_B - z_A = 3$ et $z_D - z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$, donc

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

car $2 + 2i\sqrt{3} = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et diviser par le réel positif 3 ne change pas l'argument. Donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3}$ et les droites (AB) et (CD) font un angle de 60°. **Contrôle** : $\frac{CD}{AB} = \frac{4}{3}$, avec $AB = 3$ et $CD = 4$. Pour deux droites, l'angle se lit modulo π : un argument de $\frac{2\pi}{3}$ aurait aussi donné 60°.

Réponse. $Z = \frac{2+2i\sqrt{3}}{3}$, d'argument $\frac{\pi}{3}$: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3}$, et les droites font un angle de 60°.

Correction de l'exercice 5 – Quatre points cocycliques

Quatre points distincts sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. On calcule chaque facteur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \frac{i-1}{i+1} \times \frac{1-i}{-1-i} = i \times i = -1$$

Le birapport est réel ; comme A, B sont sur l'axe des réels et C ne l'est pas, les points ne sont pas alignés : ils sont cocycliques. **Autre méthode** : $|1| = |-1| = |i| = |-i| = 1$, les quatre points sont sur le cercle unité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Le birapport vaut -1, réel : les quatre points sont cocycliques — ils sont d'ailleurs tous de module 1, donc sur le cercle unité.

Correction de l'exercice 6 – Le cercle de diamètre AB

On a $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \dfrac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$, dont l'argument est l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$ et qui n'est pas nul puisque $M \neq A$.

Si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, l'angle $A\hat{M}B$ est droit (angle inscrit dans un demi-cercle) : l'argument vaut $\pm\dfrac{\pi}{2}$ et le quotient est imaginaire pur. Réciproquement, si le quotient est imaginaire pur et non nul, son argument vaut $\pm\dfrac{\pi}{2}$: M voit $[AB]$ sous un angle droit, il est donc sur le cercle de diamètre $[AB]$.

$$M \in C_{[AB]} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}^*$$

Contrôle avec $A(-1)$, $B(1)$, $M(i)$: $\dfrac{i+1}{i-1} = -i$, imaginaire pur, et i est bien sur le cercle unité.

Réponse. L'argument du quotient est l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$; il vaut $\pm\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si l'angle en M est droit, c'est-à-dire si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction de l'exercice 7 – Nature d'un quadrilatère

$z_B - z_A = 3$ et $z_C - z_D = 3$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs mesurent $AB = 3$ et $AD = |1 + 2i| = \sqrt{5}$: ce n'est pas un losange. L'angle en A est donné par

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 2i}{3}$$

qui n'est pas imaginaire pur : l'angle n'est pas droit et ce n'est pas un rectangle. $ABCD$ est un parallélogramme quelconque, d'angle en A égal à $\arg(1 + 2i) \approx 63{,}4°$. **Contrôle** : les diagonales ont le même milieu $2 + i$, mais des longueurs différentes, $2\sqrt{5}$ et $2\sqrt{2}$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc c'est un parallélogramme ; $AB = 3 \neq AD = \sqrt{5}$ et l'angle en A vaut environ $63{,}4^\circ$: c'est un parallélogramme quelconque.

Correction de l'exercice 8 – Un angle non remarquable

On calcule $z_B - z_A = 3 + i$ et $z_C - z_A = 1 + 3i$, puis

$$Z = \frac{1 + 3i}{3 + i} = \frac{(1 + 3i)(3 - i)}{10} = \frac{6 + 8i}{10} = 0{,}6 + 0{,}8i$$

$|Z| = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = 1$: $AC = AB$, le triangle est isocèle en A. L'argument θ vérifie $\cos\theta = 0{,}6$ et $\sin\theta = 0{,}8 > 0$, donc $\theta = \arccos 0{,}6 \approx 0{,}9273$ rad, soit environ $53{,}1°$. **Contrôle** : $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ et $\arctan\dfrac{4}{3} \approx 53{,}13°$; le signe du sinus a permis de choisir le bon angle.

Réponse. $Z = 0{,}6 + 0{,}8i$, de module 1 : le triangle est isocèle en A et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \approx 53{,}1^\circ$.

Correction de l'exercice 9 – Triangle équilatéral direct

ABC est équilatéral direct quand $\overrightarrow{AC}$ s'obtient en tournant $\overrightarrow{AB}$ de $\dfrac{\pi}{3}$ sans changer sa longueur :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$z_C - z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

d'où $z_C = \frac{7}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \approx 3{,}5 + 3{,}598i$. **Contrôle** : $AB = 3$, $AC = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3$ et $BC = \left|-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = 3$. Avec $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$, on obtiendrait le triangle indirect, de sommet symétrique par rapport à (AB).

Réponse. $z_C = \frac{7}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \approx 3{,}5 + 3{,}598i$ (le triangle indirect correspondrait à $\frac{7}{2} + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$).

Correction de l'exercice 10 – Une caractérisation élégante

On utilise $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $\bar{j} = j^2$.

a) Avec $z_A = 1$, $z_B = j^2$, $z_C = j$: $1 + j \times j^2 + j^2 \times j = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$. Le triangle n'est pas équilatéral direct : il est équilatéral indirect. En effet $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{j-1}{j^2-1} = \frac{1}{j+1} = -j$, d'argument $-\frac{\pi}{3}$.

b) $1 + i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = -2j^2$, donc

$$0 + 2j + j^2 \times (-2j^2) = 2j - 2j^4 = 2j - 2j = 0$$

Le triangle $\left(0\,;2\,;1 + i\sqrt{3}\right)$ est équilatéral direct ; c'est, à une translation près, le triangle de l'exercice 1.

Réponse. a) la somme vaut $3 \neq 0$: le triangle $\left(1\,;j^2\,;j\right)$ est équilatéral **indirect** · b) la somme est nulle : le triangle $\left(0\,;2\,;1 + i\sqrt{3}\right)$ est équilatéral **direct**.

Correction de l'exercice 11 – Trois points et un cercle

Première méthode : A, B et C sont de module 1, donc sur le cercle unité ; trois points non alignés déterminent un unique cercle, et D, de module 2, n'est pas dessus. Les quatre points ne sont pas cocycliques.

Seconde méthode : le birapport vaut

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \frac{-2}{-1-i} \times \frac{2-i}{1} = \frac{(-4+2i)(-1+i)}{2} = 1 - 3i$$

Il n'est pas réel : les points ne sont ni cocycliques ni alignés. Pour qu'un quatrième point soit sur le cercle, il faudrait le placer sur le cercle unité, par exemple en $-i$.

Réponse. Non : A, B, C sont sur le cercle unité mais $|2| = 2$; et le birapport vaut $1 - 3i$, qui n'est pas réel.

Correction de l'exercice 12 – Un lieu d'angle constant

Diviser par le réel positif 2 ne change pas l'argument : la condition s'écrit $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4}$. Or $z - 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $A(1)$: ce vecteur doit faire un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels, dans ce sens-là (l'argument est fixé modulo 2π, pas π).

$$z = 1 + t\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad (t > 0)$$

L'ensemble est la demi-droite d'origine A dirigée par $\vec{u}(1\,;1)$, privée de A (où le quotient

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est nul et n'a pas d'argument) : $y = x - 1$ avec $y > 0$. **Contrôle** : $z = 3 + 2i$ donne $z - 1 = 2 + 2i$, d'argument $\frac{\pi}{4}$; $z = -1 - 2i$, sur la même droite mais de l'autre côté, donne $-2 - 2i$, d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

Réponse. La demi-droite d'origine $A(1)$ et de direction $e^{i\frac{\pi}{4}}$, privée de A : équation $y = x - 1$ avec $y > 0$.

Correction de l'exercice 13 – Orthocentre et cercle

Il suffit de montrer que $Z = \dfrac{h-a}{c-b} = \dfrac{b+c}{c-b}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire que $\overline{Z} = -Z$. Comme $|b| = |c| = 1$, on a $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$ et $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$, donc

$$\overline{Z} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+c}{bc}}{\frac{b-c}{bc}} = \frac{b+c}{b-c} = -Z$$

Z est imaginaire pur : $(AH) \perp (BC)$, et H est sur la hauteur issue de A. Les lettres jouant des rôles symétriques, H est aussi sur les deux autres hauteurs : c'est l'orthocentre, et $z_H = a + b + c$. **Contrôle** avec $a = 1$, $b = i$, $c = -1$: $h = i = b$, et le triangle est rectangle en B puisque $[AC]$ est un diamètre.

Réponse. $\dfrac{h-a}{c-b} = \dfrac{b+c}{c-b}$ vérifie $\overline{Z} = -Z$ (car $\overline{b} = 1/b$ et $\overline{c} = 1/c$), donc il est imaginaire pur : $(AH) \perp (BC)$. Par symétrie, H est l'orthocentre.

Correction de l'exercice 14 – Cap et changement de cap

a) $z_{\overrightarrow{AB}} = (6 + 7i) - (2 + 3i) = 4 + 4i$ et $AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}657$ milles.

b) $z_C - z_B = -3 + 3i$, d'où

$$Z = \frac{-3 + 3i}{4 + 4i} = \frac{3}{4} \times \frac{(-1 + i)(1 - i)}{2} = \frac{3}{4}\,i$$

Son argument vaut $\frac{\pi}{2}$: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2}$, le cap change de 90°. Son module $\frac{3}{4}$ indique que la seconde étape ($BC = 3\sqrt{2}$) mesure les trois quarts de la première.

c) L'angle est positif, donc le virage se fait dans le sens direct, vers la gauche : à bâbord. **Contrôle** : le cap passe de $\arg(4 + 4i) = 45°$ à $\arg(-3 + 3i) = 135°$.

Réponse. a) $z_{\overrightarrow{AB}} = 4 + 4i$ et $AB = 4\sqrt{2} \approx 5{,}657$ milles · b) $Z = \frac{3}{4}i$, d'argument $\frac{\pi}{2}$: changement de cap de 90° · c) l'argument est positif : virage à **bâbord**.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : une configuration complète

a) $AB = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$, $AC = |-3 + i| = \sqrt{10}$ et $BC = |-1 - i| = \sqrt{2}$: les trois côtés sont différents. Comme $AB^2 + BC^2 = 8 + 2 = 10 = AC^2$, le triangle est rectangle en B. **Contrôle** : $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-1 - i}{2 - 2i} = -\dfrac{i}{2}$ est imaginaire pur.

b) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$:

$$z_\Omega = \frac{2 + (-1 + i)}{2} = \frac{1 + i}{2} \qquad R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1{,}581$$

c) Le cercle circonscrit est le cercle de diamètre $[AC]$: D en fait partie si et seulement si l'angle en D est droit. Or $\dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D} = \dfrac{-2 - 2i}{1 - 3i} = \dfrac{(-2 - 2i)(1 + 3i)}{10} = 0{,}4 - 0{,}8i$ n'est pas imaginaire pur : D n'est pas sur le cercle. **Contrôle** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\Omega D = |0{,}5 + 2{,}5i| = \sqrt{6{,}5} \approx 2{,}55 \neq 1{,}581$.

Réponse. a) triangle rectangle en B, scalène ($AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$) · b) $z_\Omega = \dfrac{1+i}{2}$ et $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \approx 1{,}581$ · c) non : le quotient vaut $0{,}4 - 0{,}8i$, non imaginaire pur, donc l'angle en D n'est pas droit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).