

Plaquette 2 - Angles orientés : alignement, orthogonalité et cocyclicité

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule centrale. Pour quatre points A, B, C, D avec $A \neq B$ et $C \neq D$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \quad [2\pi]$$

Cas le plus utilisé : trois points A, B, C avec A comme sommet :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \quad [2\pi]$$

Le module du même quotient donne un rapport de longueurs :

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB}$$

Les trois tests à connaître. On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

Z est...	configuration
réel non nul	A, B, C alignés
imaginaire pur	$(AB) \perp (AC)$
de module 1	$AB = AC$, triangle isocèle en A
égal à $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	triangle équilatéral
égal à $\pm i$	triangle rectangle isocèle en A

Cocyclicité. Quatre points deux à deux distincts A, B, C, D sont **cocycliques ou alignés** si et seulement si leur **birapport** est réel :

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

C'est la traduction du théorème de l'angle inscrit : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ modulo π .

Triangle équilatéral direct. ABC est équilatéral **direct** si et seulement si

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

Rappel de mesure. Un argument se lit modulo 2π pour un angle orienté de vecteurs, mais modulo π lorsqu'on parle de l'angle entre deux **droites**.

Correction de l'exercice 1 - Un angle et un rapport de longueurs

- **Numérateur :** $z_C - z_A = (2 + i\sqrt{3}) - 1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \checkmark$
- **Dénominateur :** $z_B - z_A = 3 - 1 = 2 \quad \checkmark$
- **Quotient :**

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- **Module :** $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \checkmark$

— **Argument** : $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Angle** : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ✓

— **Mesure de l'angle** :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

— **Rapport de longueurs** : c'est le module de Z ✓

— **Résultat** : $\frac{AC}{AB} = 1$, donc $AC = AB$ ✓

— **Conclusion partielle** : le triangle est isocèle en A ✓

— **Conclusion complète** : isocèle **avec un angle de 60°** au sommet ✓

— **Donc** : le triangle ABC est **équilatéral** ✓

— **Vérification par les longueurs** : $AB = |2| = 2$ ✓

— **Deuxième longueur** : $AC = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ ✓

— **Troisième** : $z_C - z_B = (2 + i\sqrt{3}) - 3 = -1 + i\sqrt{3}$ ✓

— **Module** : $BC = \sqrt{1 + 3} = 2$ ✓

— **Cohérence** : les trois côtés mesurent 2 ✓

— **Remarque** : le signe **positif** de l'argument indique que le triangle est **équilatéral direct** ✓

Réponse. $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{AC}{AB} = 1$: le triangle ABC est **équilatéral (direct)**, de côté 2.

Correction de l'exercice 2 - Tester une orthogonalité

— **Premier vecteur** : $z_B - z_A = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$ ✓

— **Second vecteur** : $z_C - z_A = 4i - (1 + i) = -1 + 3i$ ✓

— **Quotient** : $Z = \frac{-1 + 3i}{3 + i}$ ✓

— **On multiplie par le conjugué $3 - i$** ✓

— **Dénominateur** : $9 + 1 = 10$ ✓

— **Numérateur** : $(-1 + 3i)(3 - i) = -3 + i + 9i + 3$ ✓

— **Simplification** : $10i$ ✓

— **Quotient** :

$$Z = \frac{10i}{10} = i$$

— **Nature de Z** : imaginaire pur ✓

— **Conclusion** : $(AB) \perp (AC)$, le triangle est **rectangle en A** ✓

— **Argument de Z** : $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Lecture** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ✓

— **Module de Z** : $|i| = 1$ ✓

— **Conséquence** : $AC = AB$, le triangle est aussi **isocèle en A** ✓

— **Nature exacte** : triangle rectangle **isocèle** en A ✓

— **Vérification par les longueurs** : $AB = |3 + i| = \sqrt{10}$ ✓

— **Deuxième** : $AC = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$ ✓

— **Hypoténuse** : $z_C - z_B = 4i - (4 + 2i) = -4 + 2i$ ✓

— **Longueur** : $BC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ ✓

— **Test de Pythagore** : $10 + 10 = 20$ ✓

— **Cohérence** : conforme ✓

Réponse. $Z = i$: le triangle est rectangle **et** isocèle en A , avec $AB = AC = \sqrt{10}$ et $BC = 2\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 3 - Tester un alignement

— **Premier vecteur** : $z_B - z_A = (3 + 5i) - (1 + 2i) = 2 + 3i$ ✓

— **Second vecteur** : $z_C - z_A = (-1 - i) - (1 + 2i) = -2 - 3i$ ✓

— **Observation immédiate** : le second est l'**opposé** du premier ✓

— **Quotient** :

$$Z = \frac{-2 - 3i}{2 + 3i} = -1$$

— **Nature de Z** : réel ✓

— **Conclusion** : A, B, C sont **alignés** ✓

— **Argument de Z** : π ✓

— **Lecture** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi$, les deux vecteurs sont de **sens opposés** ✓

— **Traduction vectorielle** : $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ ✓

— **Conséquence** : A est le **milieu** de $[BC]$ ✓

— **Vérification par la formule du milieu** : $\frac{z_B + z_C}{2}$ ✓

— **Somme** : $(3 + 5i) + (-1 - i) = 2 + 4i$ ✓

— **Moitié** : $1 + 2i$ ✓

— **Cohérence** : c'est bien z_A ✓

— **Contrôle des longueurs** : $AB = |2 + 3i| = \sqrt{13}$ ✓

— **Et** : $AC = |-2 - 3i| = \sqrt{13}$ ✓

— **Cohérence** : A est équidistant de B et C , sur le segment ✓

— **Remarque** : un quotient réel **néglatif** signifie que le sommet est **entre** les deux autres points ✓

— **A contrario** : un quotient réel **positif** placerait A à l'extérieur du segment ✓

Réponse. $Z = -1$, réel : les points sont alignés, et A est le **milieu** de $[BC]$.

Correction de l'exercice 4 - Angle entre deux droites

— **Premier vecteur** : $z_B - z_A = 4 - 1 = 3$ ✓

— **Second vecteur** : $z_D - z_C = (2i + 2 + 2i\sqrt{3}) - 2i$ ✓

— **Simplification** : $2 + 2i\sqrt{3}$ ✓

— **Quotient** :

$$Z = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{3}$$

— **Module** : $\frac{|2 + 2i\sqrt{3}|}{3} = \frac{\sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{4}{3}$ ✓

— **Argument** : celui de $2 + 2i\sqrt{3}$, c'est-à-dire celui de $1 + i\sqrt{3}$ ✓

— **Justification** : multiplier par un réel positif ne change pas l'argument ✓

— **Cosinus** : $\frac{1}{2}$, **sinus** : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Angle** : $\frac{\pi}{3}$ ✓

— **Mesure de l'angle orienté :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

— **Conversion en degrés :** $\frac{\pi}{3} = 60^\circ \checkmark$

— **Angle entre les droites :** il se mesure modulo π , et on retient la valeur dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \checkmark$

— **Ici :** $60^\circ \leq 90^\circ$, on garde $60^\circ \checkmark$

— **Résultat :** les droites (AB) et (CD) font un angle de $60^\circ \checkmark$

— **Rapport de longueurs :** $\frac{CD}{AB} = \frac{4}{3} \checkmark$

— **Vérification :** $AB = 3$ et $CD = |2 + 2i\sqrt{3}| = 4 \checkmark$

— **Cohérence :** $\frac{4}{3} \checkmark$

— **Remarque :** si l'argument avait valu $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, l'angle **entre droites** serait $60^\circ \checkmark$

— **Règle :** pour deux droites, on remplace θ par $\pi - \theta$ quand θ dépasse $\frac{\pi}{2} \checkmark$

Réponse. $Z = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{3}$, d'argument $\frac{\pi}{3}$: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3}$, et les droites font un angle de 60° .

Correction de l'exercice 5 - Quatre points cocycliques

— **Critère :** les quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport est réel $\checkmark$

— **Birapport :**

$$B = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}$$

— **Premier numérateur :** $z_C - z_A = i - 1 \checkmark$

— **Premier dénominateur :** $z_C - z_B = i + 1 \checkmark$

— **Premier facteur :** $\frac{i-1}{i+1} \checkmark$

— **On multiplie par le conjugué $1 - i$ $\checkmark$**

— **Dénominateur :** $(1+i)(1-i) = 2 \checkmark$

— **Numérateur :** $(-1+i)(1-i) = -1 + i + i + 1 = 2i \checkmark$

— **Premier facteur :** $i \checkmark$

— **Second numérateur :** $z_D - z_B = -i + 1 = 1 - i \checkmark$

— **Second dénominateur :** $z_D - z_A = -i - 1 \checkmark$

— **Second facteur :** $\frac{1-i}{-1-i} \checkmark$

— **On multiplie par le conjugué $-1 + i$ $\checkmark$**

— **Dénominateur :** $1 + 1 = 2 \checkmark$

— **Numérateur :** $(1-i)(-1+i) = -1 + i + i + 1 = 2i \checkmark$

— **Second facteur :** $i \checkmark$

— **Birapport :** $i \times i = -1 \checkmark$

— **Nature :** -1 est réel $\checkmark$

— **Conclusion :** les quatre points sont cocycliques ou alignés $\checkmark$

— **Ils ne sont pas alignés :** A, B sont sur l'axe des réels, C ne l'est pas $\checkmark$

— **Conclusion finale :** les quatre points sont **cocycliques** $\checkmark$

— **Autre méthode, immédiate :** leurs modules valent tous 1 $\checkmark$

— **Donc :** ils sont tous sur le **cercle unité** $\checkmark$

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

Réponse. Le birapport vaut -1 , réel : les quatre points sont cocycliques — ils sont d'ailleurs tous de module 1, donc sur le cercle unité.

Correction de l'exercice 6 - Le cercle de diamètre AB

— **Traduction du quotient** : $\arg\left(\frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}\right) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ ✓

— **Attention aux signes** : $\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \frac{-(z_A - z_M)}{-(z_B - z_M)} = \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$ ✓

— **Donc** : les deux écritures ont le **même** argument ✓

— **Sens direct** : supposons M sur le cercle de diamètre $[AB]$ ✓

— **Théorème de l'angle inscrit** : l'angle $\widehat{AMB}$ est **droit** ✓

— **Donc** : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm \frac{\pi}{2}$ ✓

— **Conséquence sur l'argument** : il vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Or** : un complexe non nul d'argument $\pm \frac{\pi}{2}$ est **imaginaire pur** ✓

— **Sens réciproque** : supposons le quotient imaginaire pur non nul ✓

— **Alors** : son argument vaut $\pm \frac{\pi}{2}$ ✓

— **Donc** : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm \frac{\pi}{2}$, l'angle en M est droit ✓

— **Conclusion** : M voit $[AB]$ sous un angle droit, donc appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ✓

— **Équivalence établie** :

$$M \in C_{[AB]} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}^*$$

— **Contrôle sur un exemple** : $A(-1), B(1), M(i)$ ✓

— **Quotient** : $\frac{i+1}{i-1}$ ✓

— **Calcul** : on multiplie par $-1-i$ en haut et en bas, dénominateur 2 ✓

— **Numérateur** : $(1+i)(-1-i) = -1-i-i+1 = -2i$ ✓

— **Quotient** : $-i$, bien imaginaire pur ✓

— **Cohérence** : i est sur le cercle unité, qui est le cercle de diamètre $[AB]$ ✓

Réponse. L'argument du quotient est l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$; il vaut $\pm \frac{\pi}{2}$ si et seulement si l'angle en M est droit, c'est-à-dire si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction de l'exercice 7 - Nature d'un quadrilatère

— **Premier test, parallélogramme** : on compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ✓

— **Premier vecteur** : $z_B - z_A = 3$ ✓

— **Second vecteur** : $z_C - z_D = (4+2i) - (1+2i) = 3$ ✓

— **Égalité** : les deux affixes sont égales ✓

— **Conclusion** : $ABCD$ est un **parallélogramme** ✓

— **Deuxième test, losange** : on compare les longueurs des côtés consécutifs ✓

— **Longueur AB** : $|3| = 3$ ✓

— **Longueur AD** : $|1+2i| = \sqrt{5} \approx 2,236$ ✓

— **Comparaison** : $3 \neq \sqrt{5}$ ✓

— **Conclusion** : ce n'est pas un losange ✓

— **Troisième test, rectangle** : on regarde l'angle en A ✓

— **Quotient :**

$$Z = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 2i}{3}$$

— **Partie réelle :** $\frac{1}{3} \neq 0$ ✓

— **Conclusion :** Z n'est pas imaginaire pur, l'angle en A n'est pas droit ✓

— **Donc :** ce n'est pas un rectangle ✓

— **Nature finale :** $ABCD$ est un parallélogramme **quelconque** ✓

— **Mesure de l'angle en A :** $\arg\left(\frac{1+2i}{3}\right) = \arg(1+2i)$ ✓

— **Valeur :** $\arctan 2 \approx 1,107$ rad ✓

— **En degrés :** environ $63,4^\circ$ ✓

— **Contrôle par les diagonales :** milieu de $[AC] = \frac{4+2i}{2} = 2+i$ ✓

— **Milieu de $[BD]$:** $\frac{3+1+2i}{2} = 2+i$ ✓

— **Cohérence :** les diagonales se coupent en leur milieu, confirmant le parallélogramme ✓

— **Longueurs des diagonales :** $AC = |4+2i| = 2\sqrt{5}$ et $BD = |-2+2i| = 2\sqrt{2}$ ✓

— **Conséquence :** elles sont de longueurs différentes, ce qui reconferme l'absence d'angle droit ✓

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc c'est un parallélogramme ; $AB = 3 \neq AD = \sqrt{5}$ et l'angle en A vaut environ $63,4^\circ$: c'est un parallélogramme quelconque.

Correction de l'exercice 8 - Un angle non remarquable

— **Premier vecteur :** $z_B - z_A = (5+2i) - (2+i) = 3+i$ ✓

— **Second vecteur :** $z_C - z_A = (3+4i) - (2+i) = 1+3i$ ✓

— **Quotient :** $Z = \frac{1+3i}{3+i}$ ✓

— **On multiplie par le conjugué $3-i$** ✓

— **Dénominateur :** $9+1 = 10$ ✓

— **Numérateur :** $(1+3i)(3-i) = 3-i+9i+3$ ✓

— **Simplification :** $6+8i$ ✓

— **Forme algébrique :**

$$Z = \frac{6+8i}{10} = 0,6 + 0,8i$$

— **Module :** $\sqrt{0,36+0,64} = 1$ ✓

— **Conséquence :** $AC = AB$, le triangle est isocèle en A ✓

— **Vérification :** $|3+i| = \sqrt{10}$ et $|1+3i| = \sqrt{10}$ ✓

— **Argument :** $\cos \theta = 0,6$ et $\sin \theta = 0,8$ ✓

— **Ce n'est pas un angle remarquable :** on passe par la calculatrice ✓

— **Calcul :** $\theta = \arccos(0,6)$, le sinus étant positif ✓

— **Valeur en radians :** $\theta \approx 0,9273$ ✓

— **Conversion :** $0,9273 \times \frac{180}{\pi}$ ✓

— **Résultat :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 53,1^\circ$$

— **Contrôle par la tangente :** $\tan \theta = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$ ✓

- **Vérification** : $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ \checkmark$
- **Cohérence** : conforme $\checkmark$
- **Remarque** : on reconnaît le triangle de proportions (3 ; 4 ; 5) $\checkmark$
- **Prudence** : arctan seul ne suffit pas en général, il faut le signe du cosinus pour trancher entre θ et $\theta + \pi \checkmark$

Réponse. $Z = 0,6 + 0,8i$, de module 1 : le triangle est isocèle en A et $(\overline{AB}, \overline{AC}) \approx 53,1^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - Triangle équilatéral direct

- **Caractérisation** : $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) \checkmark$
- **Justification** : le quotient doit être de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3} \checkmark$
- **Calcul du vecteur** : $z_B - z_A = (5 + i) - (2 + i) = 3 \checkmark$
- **Forme algébrique de l'exponentielle** : $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Produit** : $3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \checkmark$
- **Affixe de C** : on ajoute $z_A \checkmark$
- **Calcul** : $2 + \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \checkmark$
- **Résultat** :

$$z_C = \frac{7}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

- **Valeur approchée** : $3,5 + 3,598i \checkmark$
- **Vérification, AB** : 3 $\checkmark$
- **Vérification, AC** : $\left|\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} \checkmark$
- **Calcul** : $\sqrt{\frac{36}{4}} = 3 \checkmark$
- **Vérification, BC** : $z_C - z_B = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \checkmark$
- **Module** : 3 également $\checkmark$
- **Cohérence** : les trois côtés valent 3 $\checkmark$
- **Contrôle de l'orientation** : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'argument $+\frac{\pi}{3} \checkmark$
- **Le second point possible** : avec $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, on obtiendrait le triangle **indirect** $\checkmark$
- **Son affixe** : $\frac{7}{2} + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \approx 3,5 - 1,598i \checkmark$
- **Interprétation** : les deux points sont symétriques par rapport à la droite (AB) $\checkmark$

Réponse. $z_C = \frac{7}{2} + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \approx 3,5 + 3,598i$ (le triangle indirect correspondrait à $\frac{7}{2} + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$).

Correction de l'exercice 10 - Une caractérisation élégante

- **Propriétés de j** : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0 \checkmark$
- **Forme algébrique** : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

- **a) On calcule** : $z_A + jz_B + j^2z_C$ avec $z_A = 1, z_B = j^2, z_C = j$ ✓
- **Deuxième terme** : $j \times j^2 = j^3 = 1$ ✓
- **Troisième terme** : $j^2 \times j = 1$ ✓
- **Somme** : $1 + 1 + 1 = 3$ ✓
- **Constat** : la somme n'est **pas** nulle ✓
- **Conclusion** : ce triangle n'est pas équilatéral **direct** — il est équilatéral **indirect** ✓
- **Vérification de l'orientation** : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{j - 1}{j^2 - 1}$ ✓
- **Factorisation** : $j^2 - 1 = (j - 1)(j + 1)$ ✓
- **Simplification** : $\frac{1}{j + 1}$ ✓
- **Or** : $1 + j = -j^2$ ✓
- **Donc** : le quotient vaut $-\frac{1}{j^2} = -j$ ✓
- **Argument de $-j$** : $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$, soit $-\frac{\pi}{3}$ ✓
- **Cohérence** : l'angle vaut $-\frac{\pi}{3}$, le triangle est bien **indirect** ✓
- **Test de la version indirecte** : $z_A + j^2z_B + jz_C = 1 + j^4 + j^2 = 1 + j + j^2 = 0$ ✓
- **b) Calcul** : $0 + j \times 2 + j^2(1 + i\sqrt{3})$ ✓
- **Observation** : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = -2j^2$ ✓
- **Justification** : $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ✓
- **Troisième terme** : $j^2 \times (-2j^2) = -2j^4 = -2j$ ✓
- **Somme** : $2j - 2j = 0$ ✓
- **Conclusion** : le triangle $0, 2, 1 + i\sqrt{3}$ est équilatéral **direct** ✓
- **Contrôle** : c'est bien le triangle de l'exercice 1, translaté, dont l'angle valait $+\frac{\pi}{3}$ ✓

Réponse. a) la somme vaut $3 \neq 0$: le triangle $(1; j^2; j)$ est équilatéral **indirect** · b) la somme est nulle : le triangle $(0; 2; 1 + i\sqrt{3})$ est équilatéral **direct**.

Correction de l'exercice 11 - Trois points et un cercle

- **Première méthode, les modules** : $|1| = 1, |i| = 1, |-1| = 1$ ✓
- **Constat** : A, B, C sont sur le cercle unité ✓
- **Quatrième point** : $|2| = 2 \neq 1$ ✓
- **Conclusion provisoire** : D n'est pas sur ce cercle ✓
- **Prudence** : il faut vérifier que le cercle passant par A, B, C est bien unique ✓
- **Justification** : trois points non alignés déterminent un unique cercle ✓
- **Non-alignement** : A et C sont sur l'axe des réels, B non ✓
- **Conclusion** : les quatre points ne sont **pas** cocycliques ✓
- **Seconde méthode, le birapport** :

$$B_r = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}$$

- **Premier numérateur** : $-1 - 1 = -2$ ✓
- **Premier dénominateur** : $-1 - i$ ✓
- **Second numérateur** : $2 - i$ ✓
- **Second dénominateur** : $2 - 1 = 1$ ✓

- **Produit** : $\frac{-2(2-i)}{-1-i} = \frac{-4+2i}{-1-i} \checkmark$
- **On multiplie par le conjugué** $-1+i \checkmark$
- **Dénominateur** : $1+1=2 \checkmark$
- **Numérateur** : $(-4+2i)(-1+i) = 4-4i-2i-2 = 2-6i \checkmark$
- **Birapport** : $\frac{2-6i}{2} = 1-3i \checkmark$
- **Nature** : la partie imaginaire vaut $-3 \neq 0$, le birapport n'est pas réel $\checkmark$
- **Conclusion** : les points ne sont ni cocycliques ni alignés $\checkmark$
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent $\checkmark$
- **Pour rendre D cocyclique** : il faudrait le placer sur le cercle unité, par exemple en $-i \checkmark$

Réponse. Non : A, B, C sont sur le cercle unité mais $|2| = 2$; et le birapport vaut $1-3i$, qui n'est pas réel.

Correction de l'exercice 12 - Un lieu d'angle constant

- **Simplification** : 2 est un réel positif $\checkmark$
 - **Conséquence** : $\arg\left(\frac{z-1}{2}\right) = \arg(z-1) \checkmark$
 - **Justification** : diviser par un réel positif ne change pas l'argument $\checkmark$
 - **Condition équivalente** : $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi \checkmark$
 - **Traduction géométrique** : $z-1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$, avec $A(1) \checkmark$
 - **Lecture** : le vecteur $\overrightarrow{AM}$ fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels $\checkmark$
 - **Nature de l'ensemble** : une **demi-droite** d'origine $A \checkmark$
 - **Pourquoi une demi-droite et non une droite** : l'argument est fixé modulo 2π , pas modulo $\pi \checkmark$
 - **Conséquence** : le sens est imposé $\checkmark$
 - **Description** :
la demi-droite d'origine $A(1)$ dirigée par $\vec{u}(1;1)$, privée de A
 - **Exclusion de A** : pour $z=1$, le quotient est nul et n'a pas d'argument $\checkmark$
 - **Équation cartésienne** : les points s'écrivent $z = 1 + te^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $t > 0 \checkmark$
 - **Coordonnées** : $x = 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = t\frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$
 - **Élimination de t** : $y = x - 1$ avec $y > 0 \checkmark$
 - **Conclusion cartésienne** : la demi-droite d'équation $y = x - 1$, avec $y > 0 \checkmark$
 - **Point de contrôle** : $z = 3 + 2i \checkmark$
 - **Calcul** : $z-1 = 2 + 2i$, d'argument $\frac{\pi}{4} \checkmark$
 - **Cohérence** : ce point convient, et $2 = 3 - 1 \checkmark$
 - **Contre-exemple** : $z = -1 - 2i$ donne $z-1 = -2 - 2i$, d'argument $-\frac{3\pi}{4} \checkmark$
 - **Conclusion** : ce point est sur la **droite** $y = x - 1$ mais pas sur la demi-droite $\checkmark$
- Réponse.** La demi-droite d'origine $A(1)$ et de direction $e^{i\frac{\pi}{4}}$, privée de A : équation $y = x - 1$ avec $y > 0$.

Correction de l'exercice 13 - Orthocentre et cercle

- **Objectif** : montrer que $\frac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur ✓
- **Calcul du numérateur** : $h-a = (a+b+c) - a = b+c$ ✓
- **Calcul du dénominateur** : $c-b$ ✓
- **Quotient** :

$$Z = \frac{b+c}{c-b}$$

- **Critère** : Z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{Z} = -Z$ ✓
- **Conjugué du numérateur** : $\bar{b} + \bar{c}$ ✓
- **Hypothèse utilisée** : $|b| = |c| = 1$, donc $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{c} = \frac{1}{c}$ ✓
- **Numérateur conjugué** : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{c+b}{bc}$ ✓
- **Dénominateur conjugué** : $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}$ ✓
- **Quotient conjugué** : les bc se simplifient ✓
- **Expression** :

$$\bar{Z} = \frac{b+c}{b-c}$$

- **Comparaison** : $b-c$ est l'opposé de $c-b$ ✓
- **Donc** : $\bar{Z} = -\frac{b+c}{c-b} = -Z$ ✓
- **Conclusion** : Z est imaginaire pur, donc $(AH) \perp (BC)$ ✓
- **Interprétation** : H est sur la hauteur issue de A ✓
- **Par symétrie du rôle des lettres** : H est aussi sur les hauteurs issues de B et de C ✓
- **Conclusion remarquable** : H est l'**orthocentre** du triangle ABC ✓
- **Formule à retenir** : pour un triangle inscrit dans le cercle unité, $z_H = a+b+c$ ✓
- **Contrôle sur un exemple** : $a=1, b=i, c=-1$ ✓
- **Orthocentre annoncé** : $h=i$ ✓
- **Vérification** : le triangle est rectangle en $B(i)$, car $[AC]$ est un diamètre ✓
- **Cohérence** : l'orthocentre d'un triangle rectangle est le sommet de l'angle droit, ici B ✓

Réponse. $\frac{h-a}{c-b} = \frac{b+c}{c-b}$ vérifie $\bar{Z} = -Z$ (car $\bar{b} = 1/b$ et $\bar{c} = 1/c$), donc il est imaginaire pur : $(AH) \perp (BC)$. Par symétrie, H est l'orthocentre.

Correction de l'exercice 14 - Cap et changement de cap

- **a) Vecteur** : $z_B - z_A = (6+7i) - (2+3i)$ ✓
- **Calcul** : $4+4i$ ✓
- **Distance** : $|4+4i| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ ✓
- **Simplification** : $4\sqrt{2}$ ✓
- **Résultat** :

$$AB = 4\sqrt{2} \approx 5,657 \text{ milles}$$

- **Cap initial** : $\arg(4+4i) = \frac{\pi}{4}$, soit 45° au-dessus de l'axe des réels ✓
- **b) Second vecteur** : $z_C - z_B = (3+10i) - (6+7i) = -3+3i$ ✓
- **Quotient** : $Z = \frac{-3+3i}{4+4i}$ ✓

- **Simplification par 3 et 4** : $Z = \frac{3}{4} \times \frac{-1+i}{1+i} \checkmark$
- **On multiplie par le conjugué** $1-i \checkmark$
- **Dénominateur** : 2 $\checkmark$
- **Numérateur** : $(-1+i)(1-i) = -1+i+i+1 = 2i \checkmark$
- **Quotient** :

$$Z = \frac{3}{4}i$$

- **Argument** : $\frac{\pi}{2} \checkmark$
- **Changement de cap** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$, soit $90^\circ \checkmark$
- **Module** : $\frac{3}{4} \checkmark$
- **Interprétation du module** : la seconde étape mesure les trois quarts de la première $\checkmark$
- **Vérification** : $BC = |-3+3i| = 3\sqrt{2} \approx 4,243 \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \checkmark$
- **c) Signe de l'angle** : $+\frac{\pi}{2}$, donc rotation dans le **sens direct** $\checkmark$
- **Sens direct** : c'est le sens trigonométrique, vers la gauche $\checkmark$
- **Conclusion** : le bateau vire à **bâbord**, d'un quart de tour $\checkmark$
- **Contrôle par les caps** : cap initial 45° , cap final $\arg(-3+3i) = 135^\circ \checkmark$
- **Différence** : $135 - 45 = 90^\circ$ vers la gauche $\checkmark$

Réponse. a) $z_{AB} = 4 + 4i$ et $AB = 4\sqrt{2} \approx 5,657$ milles · b) $Z = \frac{3}{4}i$, d'argument $\frac{\pi}{2}$: changement de cap de 90° · c) l'argument est positif : virage à **bâbord**.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : une configuration complète

- **a) Longueurs** : $z_B - z_A = 2i - 2 = -2 + 2i \checkmark$
- **Module** : $AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \approx 2,828 \checkmark$
- **Deuxième côté** : $z_C - z_A = (-1+i) - 2 = -3+i \checkmark$
- **Module** : $AC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3,162 \checkmark$
- **Troisième côté** : $z_C - z_B = (-1+i) - 2i = -1-i \checkmark$
- **Module** : $BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,414 \checkmark$
- **Les trois côtés différent** : le triangle est **scalène** $\checkmark$
- **Test d'un angle droit** : le plus grand côté est AC $\checkmark$
- **Somme des carrés des deux autres** : $8 + 2 = 10 \checkmark$
- **Carré du grand côté** : 10 $\checkmark$
- **Égalité** : la réciproque de Pythagore s'applique $\checkmark$
- **Conclusion** : ABC est **rectangle en B** $\checkmark$
- **Contrôle par le quotient** : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1-i}{2-2i} \checkmark$
- **On multiplie par le conjugué** $2+2i$, dénominateur 8 $\checkmark$
- **Numérateur** : $(-1-i)(2+2i) = -2-2i-2i+2 = -4i \checkmark$
- **Quotient** : $-\frac{i}{2}$, imaginaire pur $\checkmark$
- **Cohérence** : l'angle en B est bien droit $\checkmark$
- **b) Centre du cercle circonscrit** : c'est le **milieu de l'hypoténuse** [AC] $\checkmark$

— **Affixe** : $\frac{2 + (-1 + i)}{2}$ ✓

— **Résultat** :

$$z_{\Omega} = \frac{1+i}{2} = 0,5 + 0,5i$$

— **Rayon** : $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,581$ ✓

— **Contrôle sur B** : $z_B - z_{\Omega} = 2i - 0,5 - 0,5i = -0,5 + 1,5i$ ✓

— **Module** : $\sqrt{0,25 + 2,25} = \sqrt{2,5} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ✓

— **Cohérence** : B est bien sur le cercle ✓

— **c) Test par la distance** : $z_D - z_{\Omega} = (1 + 3i) - (0,5 + 0,5i) = 0,5 + 2,5i$ ✓

— **Module** : $\sqrt{0,25 + 6,25} = \sqrt{6,5} \approx 2,550$ ✓

— **Comparaison** : $2,550 \neq 1,581$ ✓

— **Test par l'angle, comme demandé** : D serait sur le cercle de diamètre [AC] si l'angle en D était droit ✓

— **Premier vecteur** : $z_A - z_D = 2 - 1 - 3i = 1 - 3i$ ✓

— **Second vecteur** : $z_C - z_D = (-1 + i) - (1 + 3i) = -2 - 2i$ ✓

— **Quotient** : $\frac{-2 - 2i}{1 - 3i}$, on multiplie par $1 + 3i$, dénominateur 10 ✓

— **Numérateur** : $(-2 - 2i)(1 + 3i) = -2 - 6i - 2i + 6 = 4 - 8i$ ✓

— **Quotient** : $0,4 - 0,8i$ ✓

— **Partie réelle** : $0,4 \neq 0$, le quotient n'est pas imaginaire pur ✓

— **Conclusion** : l'angle en D n'est pas droit, D **n'appartient pas** au cercle circonscrit ✓

Réponse. a) triangle rectangle en B, scalène ($AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$) · b)

$z_{\Omega} = \frac{1+i}{2}$ et $R = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,581$ · c) non : le quotient vaut $0,4 - 0,8i$, non imaginaire pur, donc l'angle en D n'est pas droit.