

Plaque 4 - Ensembles de points : cercles, droites et lignes de niveau

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux lectures immédiates.

$$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow M \in \text{cercle de centre } \Omega, \text{ rayon } r$$

$$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow M \in \text{médiatrice de } [AB]$$

Rapport de distances (cercle d'Apollonius). Pour $k > 0$ et $k \neq 1$, l'ensemble des M tels que $\frac{AM}{BM} = k$ est un **cercle**. Pour $k = 1$, c'est la médiatrice.

Conditions sur la partie réelle ou imaginaire.

condition	ensemble
$\operatorname{Re}(z) = a$	droite verticale $x = a$
$\operatorname{Im}(z) = b$	droite horizontale $y = b$
$\operatorname{Im}(z) \leq b$	demi-plan
$z\bar{z} = r^2$	cercle de centre O et de rayon r

Conditions sur un argument. Pour A d'affixe a :

$$\arg(z - a) = \theta [2\pi] \Leftrightarrow M \in \text{demi-droite d'origine } A, \text{ de direction } e^{i\theta}, \text{ privée de } A$$

Modulo π , on obtient la **droite entière** privée de A .

Conditions sur un quotient. Avec A et B d'affixes a et b , et $Z = \frac{z-a}{z-b}$:

Z	ensemble des M (distincts de A et B)
réel	droite (AB) privée de A et B
imaginaire pur	cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
de module 1	médiatrice de $[AB]$

Méthode générale, quand rien n'est reconnaissable. On pose $z = x + iy$, on traduit chaque bloc ($z\bar{z} = x^2 + y^2$, $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$), et on met l'équation obtenue sous forme canonique.

Correction de l'exercice 1 - Un cercle et une médiatrice

- **a) Mise sous la bonne forme** : $z - 3 + 2i = z - (3 - 2i)$ ✓
- **Reconnaissance** : $|z - z_\Omega| = r$ ✓
- **Centre** : Ω d'affixe $3 - 2i$, soit $\Omega(3; -2)$ ✓
- **Rayon** : 4 ✓
- **Conclusion** :

E_1 est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon 4

- **Piège du signe** : le centre est $3 - 2i$ et non $-3 + 2i$ ✓

- **Point de contrôle** : $z = 7 - 2i$ ✓
- **Calcul** : $|7 - 2i - 3 + 2i| = |4| = 4$ ✓
- **Cohérence** : ce point appartient bien à E_1 ✓
- **b) Points repères** : A d'affixe 1, soit $A(1; 0)$, et B d'affixe i , soit $B(0; 1)$ ✓
- **Traduction** : $AM = BM$ ✓
- **Conclusion** :

E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$

- **Équation cartésienne** : on pose $z = x + iy$ ✓
- **Membre de gauche au carré** : $(x - 1)^2 + y^2$ ✓
- **Membre de droite au carré** : $x^2 + (y - 1)^2$ ✓
- **Équation** : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$ ✓
- **Simplification** : $-2x = -2y$ ✓
- **Équation réduite** :

$$y = x$$

- **Contrôle par le milieu** : le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{1+i}{2}$, soit $(0,5; 0,5)$ ✓
- **Test** : $0,5 = 0,5$ ✓
- **Contrôle de la perpendicularité** : $\overline{AB}$ a pour coordonnées $(-1; 1)$, de coefficient directeur -1 ✓
- **Produit** : $1 \times (-1) = -1$, les droites sont bien perpendiculaires ✓

Réponse. a) cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon 4 · b) médiatrice de $[AB]$ avec $A(1)$ et $B(i)$, d'équation $y = x$.

Correction de l'exercice 2 - Un coefficient devant z

- **Obstacle** : la forme $|z - z_\Omega| = r$ n'apparaît pas directement ✓
- **Méthode** : factoriser par le coefficient de z ✓
- **Factorisation** : $2z - 4 + 2i = 2(z - 2 + i)$ ✓
- **Module d'un produit** : $|2(z - 2 + i)| = 2|z - 2 + i|$ ✓
- **Équation** : $2|z - 2 + i| = 6$ ✓
- **On divise par 2** : $|z - 2 + i| = 3$ ✓
- **Réécriture** : $|z - (2 - i)| = 3$ ✓
- **Conclusion** :

cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3

- **Erreur fréquente** : lire directement « centre $4 - 2i$, rayon 6 » ✓
- **Pourquoi c'est faux** : le coefficient 2 divise à la fois le centre et le rayon ✓
- **Point de contrôle** : $z = 5 - i$ ✓
- **Calcul direct** : $|10 - 2i - 4 + 2i| = |6| = 6$ ✓
- **Cohérence** : ce point appartient bien à l'ensemble ✓
- **Distance au centre** : $|5 - i - 2 + i| = 3$ ✓
- **Cohérence** : conforme au rayon annoncé ✓
- **Second contrôle** : $z = 2 + 2i$ ✓
- **Distance au centre** : $|2 + 2i - 2 + i| = |3i| = 3$ ✓
- **Vérification dans l'équation initiale** : $|4 + 4i - 4 + 2i| = |6i| = 6$ ✓

Réponse. Le cercle de centre Ω d'affixe $2 - i$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 3 - Un rapport de distances

- **Lecture** : avec O l'origine et A d'affixe 3, la condition s'écrit $OM = 2AM$ ✓
- **Attention** : ce n'est pas une médiatrice, à cause du facteur 2 ✓
- **Méthode** : poser $z = x + iy$ et élever au carré ✓
- **Membre de gauche** : $x^2 + y^2$ ✓
- **Membre de droite** : $4[(x - 3)^2 + y^2]$ ✓
- **Équation** : $x^2 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$ ✓
- **On rassemble** : $0 = 3x^2 + 3y^2 - 24x + 36$ ✓
- **On divise par 3** : $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ ✓
- **Forme canonique en x** : $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ ✓
- **Équation** : $(x - 4)^2 - 16 + y^2 + 12 = 0$ ✓
- **On isole** :

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4$$

- **Reconnaissance** : cercle de centre $(4; 0)$ et de rayon 2 ✓
- **Conclusion** :

cercle de centre $\Omega(4)$ et de rayon 2

- **Nom** : c'est un **cercle d'Apollonius** ✓
- **Contrôle avec $z = 2$** : $|2| = 2$ et $2|2 - 3| = 2$ ✓
- **Cohérence** : ce point est bien sur le cercle, car $|2 - 4| = 2$ ✓
- **Contrôle avec $z = 6$** : $|6| = 6$ et $2|6 - 3| = 6$ ✓
- **Cohérence** : $|6 - 4| = 2$ ✓
- **Remarque** : les points 2 et 6 sont les deux points du cercle situés sur l'axe des réels ✓
- **Règle générale** : $\frac{AM}{BM} = k$ donne un cercle si $k \neq 1$, une droite si $k = 1$ ✓

Réponse. Le cercle de centre Ω d'affixe 4 et de rayon 2 (cercle d'Apollonius).

Correction de l'exercice 4 - Parties réelle et imaginaire

- **a) Traduction** : avec $z = x + iy$, la condition s'écrit $x = 3$ ✓
 - **Conclusion** : la **droite verticale** d'équation $x = 3$ ✓
 - **Remarque** : y est libre, il n'apparaît pas dans la condition ✓
 - **b) Traduction** : $y \leq 2$ ✓
 - **Conclusion** : le **demi-plan** situé sous la droite d'équation $y = 2$, bord **inclus** ✓
 - **Attention** : l'inégalité est large, la droite frontière fait partie de l'ensemble ✓
 - **c) Relation du cours** : $z\bar{z} = |z|^2$ ✓
 - **Équation** : $|z|^2 = 9$ ✓
 - **Module** : un module est positif, donc $|z| = 3$ ✓
 - **Conclusion** :
- cercle de centre O et de rayon 3
- **Traduction cartésienne** : $x^2 + y^2 = 9$ ✓
 - **Cohérence** : c'est bien l'équation d'un cercle centré à l'origine ✓
 - **d) Relation du cours** : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x$ ✓
 - **Équation** : $2x = 4$, donc $x = 2$ ✓
 - **Conclusion** : la droite verticale d'équation $x = 2$ ✓

- **Point commun entre a) et d)** : les deux ensembles sont des droites verticales, parallèles ✓
- **Contrôle de c)** avec $z = 3i$: $z\bar{z} = 3i \times (-3i) = 9$ ✓
- **Cohérence** : $|3i| = 3$ ✓
- **Contrôle de d)** avec $z = 2 + 7i$: $(2 + 7i) + (2 - 7i) = 4$ ✓
- **Cohérence** : la partie réelle vaut bien 2 ✓
- **À retenir** : $z\bar{z}$ et $z + \bar{z}$ sont **toujours réels**, ils ne peuvent donc évaluer qu'un réel ✓

Réponse. a) droite $x = 3$ · b) demi-plan $y \leq 2$, bord inclus · c) cercle de centre O et de rayon 3 · d) droite $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Une condition sur un argument

- **Lecture** : $z - 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$, avec A d'affixe 1 ✓
- **Condition** : ce vecteur fait un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des réels ✓
- **Modulo 2π** : la direction **et le sens** sont imposés ✓
- **Conclusion** :

la demi-droite d'origine $A(1)$, de direction $e^{i\frac{\pi}{3}}$, privée de A

- **Pourquoi A est exclu** : pour $z = 1$, $z - 1 = 0$ et 0 n'a pas d'argument ✓
- **Paramétrage** : $z = 1 + te^{i\frac{\pi}{3}}$ avec $t > 0$ ✓
- **Coordonnées** : $x = 1 + \frac{t}{2}$ et $y = \frac{t\sqrt{3}}{2}$ ✓
- **Élimination de t** : $t = 2(x - 1)$ ✓
- **Substitution** : $y = \sqrt{3}(x - 1)$ ✓
- **Contrainte** : $t > 0$, donc $x > 1$ ✓
- **Équation de la demi-droite** : $y = \sqrt{3}(x - 1)$ avec $x > 1$ ✓
- **Point de contrôle** : $z = 2 + i\sqrt{3}$ ✓
- **Calcul** : $z - 1 = 1 + i\sqrt{3}$, de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Modulo π** : seule la **direction** est imposée, plus le sens ✓
- **Conséquence** : on obtient la demi-droite **et** son opposée ✓
- **Conclusion** :

la droite d'équation $y = \sqrt{3}(x - 1)$, privée de A

- **Contrôle** : $z = 0$ donne $z - 1 = -1$, d'argument π ✓
- **Vérification** : $\pi \equiv 0$ modulo π , donc $z = 0$ n'est pas solution ✓
- **Contrôle correct** : $z = -i\sqrt{3}$ donne $z - 1 = -1 - i\sqrt{3}$, d'argument $-\frac{2\pi}{3}$ ✓
- **Or** : $-\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$, donc ce point convient modulo π ✓

Réponse. Modulo 2π : la demi-droite d'origine $A(1)$ dirigée par $e^{i\frac{\pi}{3}}$, privée de A ($y = \sqrt{3}(x - 1)$ avec $x > 1$). Modulo π : la droite entière $y = \sqrt{3}(x - 1)$, privée de A .

Correction de l'exercice 6 - Un quotient imaginaire pur

- **Points repères** : A d'affixe 1 et B d'affixe -1 ✓
- **Interprétation de l'argument** : $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ ✓
- **Justification** : $z - 1 = z - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$, mais le quotient s'interprète en angle en M ✓

- **Écriture équivalente** : $\frac{z-1}{z+1} = \frac{z_A-z}{z_B-z}$ au signe près, qui se simplifie ✓
- **Condition « imaginaire pur »** : l'argument vaut $\pm \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Traduction** : l'angle $\widehat{AMB}$ est **droit** ✓
- **Conclusion** :
le cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et B
- **Éléments du cercle** : centre O , rayon 1 ✓
- **Justification** : $[AB]$ est le segment de -1 à 1 , de milieu O et de longueur 2 ✓
- **Conclusion précise** : le **cercle unité** privé des points 1 et -1 ✓
- **Vérification par le calcul** : on pose $z = x + iy$ ✓
- **Quotient** : $\frac{x-1+iy}{x+1+iy}$ ✓
- **On multiplie par le conjugué** du dénominateur ✓
- **Dénominateur** : $(x+1)^2 + y^2$ ✓
- **Numérateur** : $(x-1+iy)(x+1-iy)$ ✓
- **Partie réelle du numérateur** : $x^2 - 1 + y^2$ ✓
- **Condition** : cette partie réelle est nulle ✓
- **Équation** : $x^2 + y^2 = 1$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien le cercle unité ✓
- **Contrôle** : $z = i$ donne $\frac{i-1}{i+1} = i$, imaginaire pur ✓
- **Exclusions** : pour $z = 1$ le quotient vaut 0, qui n'est pas un imaginaire pur non nul ;
pour $z = -1$ il n'est pas défini ✓

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1)$ et $B(-1)$, c'est-à-dire le cercle unité, privé des points 1 et -1 .

Correction de l'exercice 7 - Un quotient réel

- **Critère angulaire** : un réel non nul a pour argument 0 ou π ✓
- **Traduction** : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ ou π ✓
- **Conséquence** : les vecteurs sont colinéaires, donc M, A, B sont **alignés** ✓
- **Conclusion** :
la droite (AB) , privée de A et B
- **Ici** : $A(1)$ et $B(-1)$ sont sur l'axe des réels ✓
- **Conclusion précise** : l'**axe des réels**, privé de 1 et -1 ✓
- **Vérification par le calcul** : on pose $z = x + iy$ ✓
- **On multiplie par le conjugué** du dénominateur ✓
- **Dénominateur** : $(x+1)^2 + y^2$, réel positif ✓
- **Numérateur** : $(x-1+iy)(x+1-iy)$ ✓
- **Partie imaginaire du numérateur** : $y(x+1) - y(x-1)$ ✓
- **Développement** : $yx + y - yx + y = 2y$ ✓
- **Condition** : $2y = 0$, donc $y = 0$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien l'axe des réels ✓
- **Exclusions** : $x = 1$ annulerait le numérateur — le quotient vaudrait 0 , qui est réel ✓
- **Nuance** : 0 étant réel, on peut discuter si $z = 1$ convient ✓
- **Convention de l'énoncé** : $z = 1$ est exclu d'emblée ✓

- **Exclusion obligatoire** : $z = -1$ annule le dénominateur, le quotient n'existe pas ✓
- **Contrôle** : $z = 3$ donne $\frac{2}{4} = 0,5$, réel ✓
- **Contre-exemple** : $z = i$ donne i , qui n'est pas réel ✓

Réponse. L'axe des réels (la droite (AB)), privé de 1 et de -1 .

Correction de l'exercice 8 - Une condition toujours vraie

- **Piège apparent** : on s'attend à une médiatrice ✓
- **Observation à faire avant tout calcul** : le second membre contient $\bar{z}$ ✓
- **Astuce** : $\bar{z} + 2i = \bar{z} - \overline{2i}$ ✓
- **Justification** : $\overline{2i} = -2i$, donc $-\overline{2i} = +2i$ ✓
- **Conjugué d'une différence** : $\bar{z} - \overline{2i} = \overline{z - 2i}$ ✓
- **Donc** :

$$|\bar{z} + 2i| = |\overline{z - 2i}| = |z - 2i|$$

- **Propriété utilisée** : un complexe et son conjugué ont le **même module** ✓
- **Conséquence** : l'équation s'écrit $|z - 2i| = |z - 2i|$ ✓
- **Conclusion** : elle est vérifiée pour **tout** complexe z ✓
- **Ensemble cherché** :
le plan tout entier
- **Vérification par le calcul** : on pose $z = x + iy$ ✓
- **Premier module** : $|x + i(y - 2)| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$ ✓
- **Second membre** : $\bar{z} + 2i = x - iy + 2i = x + i(2 - y)$ ✓
- **Module** : $\sqrt{x^2 + (2 - y)^2}$ ✓
- **Comparaison** : $(y - 2)^2 = (2 - y)^2$ ✓
- **Cohérence** : les deux modules sont toujours égaux ✓
- **Leçon à retenir** : il faut toujours examiner si des conjugués se cachent dans l'énoncé ✓
- **Variante à ne pas confondre** : $|z - 2i| = |z + 2i|$, qui donne l'axe des réels ✓
- **Raison** : c'est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(2i)$ et $B(-2i)$ ✓

Réponse. Le plan tout entier : $|\bar{z} + 2i| = |\overline{z - 2i}| = |z - 2i|$, l'égalité est toujours vraie.

Correction de l'exercice 9 - Une somme de carrés de distances

- **Méthode** : poser $z = x + iy$ ✓
- **Premier carré** : $(x - 1)^2 + y^2$ ✓
- **Second carré** : $(x + 1)^2 + y^2$ ✓
- **Somme** : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2$ ✓
- **Les termes en x se compensent** ✓
- **Réduction** : $2x^2 + 2y^2 + 2$ ✓
- **Équation** : $2x^2 + 2y^2 + 2 = 10$ ✓
- **On simplifie** : $x^2 + y^2 = 4$ ✓
- **Conclusion** :

le cercle de centre O et de rayon 2

- **Lecture complexe** : la somme vaut $2|z|^2 + 2$ ✓

- **Donc** : $|z|^2 = 4$, soit $|z| = 2$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Interprétation géométrique** : c'est le **théorème de la médiane** ✓
- **Énoncé** : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$, où I est le milieu de $[AB]$ ✓
- **Ici** : $I = O$ et $AB = 2$ ✓
- **Application** : $2MO^2 + 2 = 10$, donc $MO^2 = 4$ ✓
- **Cohérence** : $MO = 2$ ✓
- **Contrôle avec** $z = 2$: $|1|^2 + |3|^2 = 1 + 9 = 10$ ✓
- **Contrôle avec** $z = 2i$: $|-1 + 2i|^2 + |1 + 2i|^2 = 5 + 5 = 10$ ✓
- **Cohérence** : les deux points sont bien sur le cercle de rayon 2 ✓

Réponse. Le cercle de centre O et de rayon 2 (par le théorème de la médiane : la somme vaut $2|z|^2 + 2$).

Correction de l'exercice 10 - Quand le carré est réel

- **Mise en place** : $z = x + iy$ ✓
- **Carré** : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ✓
- **Condition « réel »** : la partie imaginaire est nulle ✓
- **Équation** : $2xy = 0$ ✓
- **Produit nul** : $x = 0$ ou $y = 0$ ✓
- **Conclusion** :
la réunion des deux axes du repère, privée de O
- **Traduction** : z est réel ($y = 0$) ou imaginaire pur ($x = 0$) ✓
- **Vérification** : si z est réel, z^2 est réel positif ✓
- **Vérification** : si $z = iy$, $z^2 = -y^2$, réel négatif ✓
- **Cohérence** : les deux cas conviennent ✓
- **Comparaison demandée** : pour z^2 imaginaire pur, la condition est $x^2 - y^2 = 0$ ✓
- **Factorisation** : $(x - y)(x + y) = 0$ ✓
- **Conclusion** : la réunion des droites $y = x$ et $y = -x$, privée de O ✓
- **Ces droites** : ce sont les **bissectrices** des axes ✓
- **Observation** : les deux ensembles se déduisent l'un de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Justification** : multiplier z par $e^{i\frac{\pi}{4}}$ multiplie z^2 par i ✓
- **Conséquence** : cela échange « réel » et « imaginaire pur » ✓
- **Contrôle** : $z = 1 + i$ donne $z^2 = 2i$, imaginaire pur ✓
- **Cohérence** : $1 + i$ est bien sur la bissectrice $y = x$ ✓
- **Contrôle** : $z = 3i$ donne $z^2 = -9$, réel ✓

Réponse. z^2 réel : la réunion des deux axes, privée de O · z^2 imaginaire pur : la réunion des bissectrices $y = \pm x$, privée de O .

Correction de l'exercice 11 - Une somme avec un inverse

- **Mise en place** : $z = x + iy$ avec $(x; y) \neq (0; 0)$ ✓
- **Inverse** : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ ✓
- **Somme, partie réelle** : $x + \frac{x}{x^2 + y^2}$ ✓

- **Somme, partie imaginaire** : $y - \frac{y}{x^2 + y^2} \checkmark$
- **Condition** : la partie imaginaire est nulle $\checkmark$
- **Équation** : $y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \checkmark$
- **Mise en facteur** :

$$y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

- **Produit nul** : $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1 \checkmark$
- **Premier cas** : z est réel, non nul $\checkmark$
- **Second cas** : $|z| = 1 \checkmark$
- **Conclusion** :

l'axe des réels privé de O , réuni au cercle unité

- **Vérification, premier cas** : $z = 2$ donne $2 + \frac{1}{2} = 2,5$, réel $\checkmark$
- **Vérification, second cas** : $z = i$ donne $i + \frac{1}{i} = i - i = 0$, réel $\checkmark$
- **Autre point du cercle** : $z = e^{i\frac{\pi}{3}} \checkmark$
- **Calcul** : $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, réel $\checkmark$
- **Démonstration élégante du second cas** : si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z} \checkmark$
- **Donc** : $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, toujours réel $\checkmark$
- **Contre-exemple** : $z = 1 + i$ donne $\frac{1}{z} = \frac{1-i}{2} \checkmark$
- **Somme** : $1,5 + 0,5i$, non réelle $\checkmark$
- **Cohérence** : $1 + i$ n'est ni réel ni de module 1 $\checkmark$

Réponse. L'axe des réels privé de O , réuni au cercle unité (car $|z| = 1$ donne $z + \frac{1}{z} = 2\operatorname{Re}(z)$).

Correction de l'exercice 12 - Intersection de deux ensembles

- **Nature de C** : cercle de centre $\Omega(2)$ et de rayon 2 $\checkmark$
- **Nature de D** : médiatrice de $[OA]$ avec A d'affixe 4 $\checkmark$
- **Équation de D** : on pose $z = x + iy \checkmark$
- **Élévation au carré** : $x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + y^2 \checkmark$
- **Simplification** : $0 = -8x + 16 \checkmark$
- **Résultat** : $x = 2 \checkmark$
- **Équation de C** : $(x - 2)^2 + y^2 = 4 \checkmark$
- **Substitution de $x = 2$** : $0 + y^2 = 4 \checkmark$
- **Solutions** : $y = 2$ ou $y = -2 \checkmark$
- **Points communs** :

$$z = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z = 2 - 2i$$

- **Vérification sur C** : $|2 + 2i - 2| = |2i| = 2 \checkmark$
- **Vérification sur D** : $|2 + 2i| = \sqrt{8} \checkmark$
- **Autre membre** : $|2 + 2i - 4| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} \checkmark$
- **Cohérence** : l'égalité est vérifiée $\checkmark$

- **Interprétation géométrique** : $x = 2$ est la droite verticale passant par le **centre** du cercle ✓
- **Conséquence** : elle coupe le cercle en deux points **diamétralement opposés** ✓
- **Contrôle** : le milieu de ces deux points est 2, c'est bien Ω ✓
- **Distance entre eux** : $|4i| = 4$, soit le diamètre ✓
- **Remarque** : deux figures se coupent en au plus deux points quand l'une est une droite et l'autre un cercle ✓

Réponse. Deux points : $z = 2 + 2i$ et $z = 2 - 2i$ (extrémités du diamètre vertical de C).

Correction de l'exercice 13 - Un disque

- **Première condition** : $|z - i| \leq 3$ ✓
- **Interprétation** : la distance au point $\Omega(i)$ est au plus 3 ✓
- **Ensemble** : le **disque fermé** de centre $\Omega(0; 1)$ et de rayon 3 ✓
- **Précision** : « disque » et non « cercle », car l'inégalité est large ✓
- **Le bord est inclus** : l'inégalité n'est pas stricte ✓
- **Seconde condition** : $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, soit $x \geq 0$ ✓
- **Ensemble** : le demi-plan des abscisses positives, bord inclus ✓
- **Intersection** :
le demi-disque droit du disque de centre $\Omega(0; 1)$ et de rayon 3
- **Justification du mot « demi »** : la droite $x = 0$ passe par le centre Ω ✓
- **Conséquence** : elle partage le disque en deux parties égales ✓
- **Aire du domaine** : la moitié de $\pi \times 3^2$ ✓
- **Calcul** : $\frac{9\pi}{2} \approx 14,14$ unités d'aire ✓
- **Test du point $2 + 3i$** : première condition ✓
- **Calcul** : $|2 + 3i - i| = |2 + 2i| = \sqrt{8} \approx 2,828$ ✓
- **Comparaison** : $2,828 \leq 3$ ✓
- **Seconde condition** : $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2 \geq 0$ ✓
- **Conclusion** : le point $2 + 3i$ **appartient** au domaine ✓
- **Contre-exemple** : $-1 + i$ vérifie la première condition mais pas la seconde ✓
- **Second contre-exemple** : $4 + i$ a pour distance $4 > 3$, il est hors du disque ✓

Réponse. Le demi-disque droit du disque fermé de centre $\Omega(i)$ et de rayon 3 (aire $\frac{9\pi}{2}$).

Oui, $2 + 3i$ y appartient : sa distance à Ω vaut $2\sqrt{2} \approx 2,83 \leq 3$ et sa partie réelle est positive.

Correction de l'exercice 14 - Une équation en z et son conjugué

- **Traduction bloc par bloc** : $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ✓
- **Second bloc** : $z + \bar{z} = 2x$ ✓
- **Équation obtenue** : $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$ ✓
- **Forme canonique en x** : $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ ✓
- **Substitution** : $(x + 3)^2 - 9 + y^2 - 4 = 0$ ✓
- **On isole** :

$$(x + 3)^2 + y^2 = 13$$

- **Reconnaissance** : cercle ✓
- **Centre** : $(-3; 0)$, d'affixe -3 ✓

— **Rayon** : $\sqrt{13} \approx 3,606$ ✓

— **Conclusion** :

cercle de centre $\Omega(-3)$ et de rayon $\sqrt{13}$

— **Écriture complexe équivalente** : $|z + 3| = \sqrt{13}$ ✓

— **Vérification de cette équivalence** : $|z + 3|^2 = (z + 3)(\overline{z + 3})$ ✓

— **Développement** : $z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} + 9$ ✓

— **Donc** : $|z + 3|^2 = 13$ redonne $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) - 4 = 0$ ✓

— **Cohérence** : conforme ✓

— **Point de contrôle** : $z = \sqrt{13} - 3$ ✓

— **Valeur approchée** : 0,606 ✓

— **Distance au centre** : $\sqrt{13}$ ✓

— **Second point de contrôle** : $z = -3 + i\sqrt{13}$ ✓

— **Calcul de $z\bar{z}$** : $9 + 13 = 22$ ✓

— **Calcul de $3(z + \bar{z})$** : $3 \times (-6) = -18$ ✓

— **Somme** : $22 - 18 - 4 = 0$ ✓

Réponse. Le cercle de centre Ω d'affixe -3 et de rayon $\sqrt{13}$, d'équation complexe $|z + 3| = \sqrt{13}$.

Correction de l'exercice 15 - Couverture de deux antennes

— **a) Couverture de A** : la distance à l'origine ne dépasse pas 5 ✓

— **Condition** : $|z| \leq 5$ ✓

— **Couverture de B** : la distance au point d'affixe 6 ne dépasse pas 4 ✓

— **Condition** : $|z - 6| \leq 4$ ✓

— **Zone de double couverture** : l'**intersection** des deux disques ✓

— **b) Points limites** : ils vérifient les deux égalités ✓

— **Système** : $x^2 + y^2 = 25$ et $(x - 6)^2 + y^2 = 16$ ✓

— **Développement de la seconde** : $x^2 - 12x + 36 + y^2 = 16$ ✓

— **On soustrait la première** : $-12x + 36 = 16 - 25$ ✓

— **Calcul** : $-12x + 36 = -9$ ✓

— **On isole** : $12x = 45$ ✓

— **Abscisse** : $x = \frac{45}{12} = 3,75$ ✓

— **Ordonnée** : $y^2 = 25 - 3,75^2$ ✓

— **Calcul** : $25 - 14,0625 = 10,9375$ ✓

— **Racine** : $y \approx \pm 3,307$ ✓

— **Affixes des points limites** :

$$z \approx 3,750 + 3,307i \quad \text{et} \quad z \approx 3,750 - 3,307i$$

— **Vérification** : $|3,75 + 3,307i| = \sqrt{14,0625 + 10,936} \approx 5$ ✓

— **Seconde vérification** : $|3,75 - 6 + 3,307i| = \sqrt{5,0625 + 10,936} \approx 4$ ✓

— **c) Sur l'axe des réels** : la zone de A va de -5 à 5 ✓

— **La zone de B** : de 2 à 10 ✓

— **Intersection** : de 2 à 5 ✓

— **Longueur** :

$$5 - 2 = 3 \text{ km}$$

- **Contrôle de cohérence** : la distance entre antennes vaut 6, et $5 + 4 = 9 > 6$ ✓
- **Conséquence** : les disques se recouvrent bien, ce qui confirme l'existence de la zone ✓
- **Remarque pratique** : cette zone de recouvrement est ce qui permet le **transfert d'appel** d'une antenne à l'autre sans coupure ✓

Réponse. a) $|z| \leq 5$ et $|z - 6| \leq 4$ · b) $z \approx 3,750 \pm 3,307i$ · c) de 2 à 5, soit 3 km.