Plaquette 4 – Ensembles de points : cercles, droites et lignes de niveau

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux lectures immédiates.

$$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow M \in \text{cercle de centre } \Omega, \text{ rayon } r$$

$$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow M \in \text{médiatrice de } [AB]$$

Rapport de distances (cercle d'Apollonius). Pour $k > 0$ et $k \neq 1$, l'ensemble des M tels que $\dfrac{AM}{BM} = k$ est un **cercle**. Pour $k = 1$, c'est la médiatrice.

Conditions sur la partie réelle ou imaginaire.

condition	ensemble
$\text{Re}(z) = a$	droite verticale $x = a$
$\text{Im}(z) = b$	droite horizontale $y = b$
$\text{Im}(z) \leq b$	demi-plan
$z\overline{z} = r^2$	cercle de centre O et de rayon r

Conditions sur un argument. Pour A d'affixe a :

$$\arg(z - a) = \theta \ [2\pi] \Leftrightarrow M \in \text{demi-droite d'origine } A, \text{ de direction } e^{i\theta}, \text{ privée de } A$$

Modulo π, on obtient la **droite entière** privée de A.

Conditions sur un quotient. Avec A et B d'affixes a et b, et $Z = \dfrac{z - a}{z - b}$:

Z	**ensemble des M (distincts de A et B)**
réel	droite (AB) privée de A et B
imaginaire pur	cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
de module 1	médiatrice de $[AB]$

Méthode générale, quand rien n'est reconnaissable. On pose $z = x + iy$, on traduit chaque bloc ($z\overline{z} = x^2 + y^2$, $z + \overline{z} = 2x$, $z - \overline{z} = 2iy$), et on met l'équation obtenue sous forme canonique.

Correction de l'exercice 1 – Un cercle et une médiatrice

a) $|z - z_\Omega|$ est la distance ΩM. On écrit $z - 3 + 2i = z - (3 - 2i)$: la condition $\Omega M = 4$, avec $\Omega(3\,;-2)$, décrit

$$E_1 : \text{cercle de centre } \Omega(3\,;-2) \text{ et de rayon } 4$$

Attention au signe : le centre est $3 - 2i$, pas $-3 + 2i$. **Contrôle** : $|7 - 2i - (3 - 2i)| = 4$.

b) Avec $A(1)$ et $B(i)$, la condition s'écrit $AM = BM$: E_2 est la médiatrice de $[AB]$. En posant $z = x + iy$ et en élevant au carré, $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$ donne $-2x = -2y$, soit $y = x$. **Contrôle** : le milieu $(0{,}5\,;0{,}5)$ vérifie bien $y = x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) cercle de centre $\Omega(3\,;-2)$ et de rayon 4 · b) médiatrice de $[AB]$ avec $A(1)$ et $B(i)$, d'équation $y = x$.

Correction de l'exercice 2 – Un coefficient devant z

On factorise par le coefficient de z : $2z - 4 + 2i = 2(z - 2 + i)$, et le module d'un produit est le produit des modules :

$$|2z - 4 + 2i| = 6 \Leftrightarrow 2|z - (2 - i)| = 6 \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = 3$$

L'ensemble est le cercle de centre $\Omega(2\,;-1)$ et de rayon 3. Lire directement « centre $4 - 2i$, rayon 6 » serait faux : le facteur 2 porte à la fois sur le centre et sur le rayon. **Contrôle** : $z = 5 - i$ vérifie $|10 - 2i - 4 + 2i| = 6$ et est bien à la distance 3 de Ω.

Réponse. Le cercle de centre Ω d'affixe $2 - i$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 3 – Un rapport de distances

Avec $A(3)$, la condition s'écrit $OM = 2AM$; à cause du facteur 2, ce n'est pas une médiatrice. On pose $z = x + iy$ et l'on élève au carré :

$$x^2 + y^2 = 4\left[(x-3)^2 + y^2\right] \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4$$

C'est le cercle de centre $\Omega(4)$ et de rayon 2, un cercle d'Apollonius. **Contrôle** : $z = 2$ vérifie $|2| = 2 = 2|2 - 3|$, et $z = 6$ vérifie $6 = 2 \times 3$; ce sont les deux points du cercle sur l'axe des réels.

Réponse. Le cercle de centre Ω d'affixe 4 et de rayon 2 (cercle d'Apollonius).

Correction de l'exercice 4 – Parties réelle et imaginaire

On pose $z = x + iy$.

a) $\mathrm{Re}(z) = 3$ s'écrit $x = 3$: c'est la droite verticale d'équation $x = 3$.

b) $\mathrm{Im}(z) \leq 2$ s'écrit $y \leq 2$: c'est le demi-plan situé sous la droite $y = 2$, droite comprise (inégalité large).

c) $z\overline{z} = |z|^2$, donc la condition s'écrit $|z| = 3$:

$$x^2 + y^2 = 9$$

c'est le cercle de centre O et de rayon 3.

d) $z + \overline{z} = 2x$, donc $2x = 4$: c'est la droite d'équation $x = 2$, parallèle à celle du a). **Contrôle** : $3i \times (-3i) = 9$ et $(2 + 7i) + (2 - 7i) = 4$. $z\overline{z}$ et $z + \overline{z}$ sont toujours réels.

Réponse. a) droite $x = 3$ · b) demi-plan $y \leq 2$, bord inclus · c) cercle de centre O et de rayon 3 · d) droite $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 – Une condition sur un argument

$z - 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$, avec $A(1)$. Modulo 2π, la direction et le sens de $\overrightarrow{AM}$ sont imposés : $z = 1 + t\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ avec $t > 0$, soit $x = 1 + \dfrac{t}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$. En éliminant $t = 2(x - 1)$:

$$y = \sqrt{3}(x - 1) \quad \text{avec} \quad x > 1$$

C'est la demi-droite d'origine A dirigée par $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, privée de A (où $z - 1 = 0$ n'a pas d'argument). **Contrôle** : $z = 2 + i\sqrt{3}$ donne $z - 1 = 1 + i\sqrt{3}$, d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

Modulo π, seule la direction compte : on obtient toute la droite $y = \sqrt{3}(x - 1)$, privée de A. Par exemple $z = -i\sqrt{3}$ donne $z - 1 = -1 - i\sqrt{3}$, d'argument $-\dfrac{2\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3} \pmod{\pi}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Modulo 2π : la demi-droite d'origine $A(1)$ dirigée par $e^{i\frac{\pi}{3}}$, privée de A ($y = \sqrt{3}(x-1)$ avec $x > 1$). Modulo π : la droite entière $y = \sqrt{3}(x-1)$, privée de A.

Correction de l'exercice 6 – Un quotient imaginaire pur

Avec $A(1)$ et $B(-1)$, on a $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{z_A - z}{z_B - z}$, dont l'argument est l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$. Ce quotient est imaginaire pur non nul si et seulement si cet angle vaut $\pm\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $A\hat{M}B$ est droit : M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et B. Ce cercle a pour centre O et pour rayon 1 : c'est le cercle unité.

Vérification par le calcul : avec $z = x + iy$, le numérateur $(x-1+iy)(x+1-iy)$ a pour partie réelle $x^2 - 1 + y^2$, qui doit être nulle :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Contrôle : $z = i$ donne $\dfrac{i-1}{i+1} = i$.

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1)$ et $B(-1)$, c'est-à-dire le cercle unité, privé des points 1 et -1.

Correction de l'exercice 7 – Un quotient réel

Un réel non nul a pour argument 0 ou π : l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$ vaut 0 ou π, les vecteurs sont colinéaires et M, A, B sont alignés. L'ensemble est la droite (AB), c'est-à-dire l'axe des réels, privée de 1 (exclu par l'énoncé) et de -1 (où le quotient n'existe pas).

Vérification par le calcul : avec $z = x + iy$, la partie imaginaire du numérateur $(x-1+iy)(x+1-iy)$ vaut

$$y(x+1) - y(x-1) = 2y$$

et elle est nulle si et seulement si $y = 0$. **Contrôle** : $z = 3$ donne $\dfrac{2}{4} = 0{,}5$, réel ; $z = i$ donne i, qui ne l'est pas.

Réponse. L'axe des réels (la droite (AB)), privé de 1 et de -1.

Correction de l'exercice 8 – Une condition toujours vraie

Avant tout calcul, on remarque que $\overline{2i} = -2i$, donc $\overline{z} + 2i = \overline{z} - \overline{2i} = \overline{z - 2i}$. Un complexe et son conjugué ayant le même module,

$$|\overline{z} + 2i| = \left|\overline{z - 2i}\right| = |z - 2i|$$

L'égalité est vraie pour tout z : l'ensemble est le plan tout entier. **Vérification** : avec $z = x + iy$, les deux modules valent $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ et $\sqrt{x^2 + (2-y)^2}$, qui sont égaux. Il ne faut pas confondre avec $|z - 2i| = |z + 2i|$, qui décrit la médiatrice de $[2i\,;-2i]$, l'axe des réels.

Réponse. Le plan tout entier : $|\overline{z} + 2i| = \left|\overline{z - 2i}\right| = |z - 2i|$, l'égalité est toujours vraie.

Correction de l'exercice 9 – Une somme de carrés de distances

Avec $z = x + iy$, les termes en x se compensent dans la somme :

$$(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

L'ensemble est le cercle de centre O et de rayon 2. C'est le théorème de la médiane : avec $A(1)$, $B(-1)$ et leur milieu O, $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2MO^2 + 2$. **Contrôle** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$z = 2$ donne $1 + 9 = 10$ et $z = 2i$ donne $5 + 5 = 10$.

Réponse. Le cercle de centre O et de rayon 2 (par le théorème de la médiane : la somme vaut $2|z|^2 + 2$).

Correction de l'exercice 10 – Quand le carré est réel

Avec $z = x + iy$, $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\,i$. z^2 est réel quand $2xy = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $y = 0$:

la réunion des deux axes, privée de O

(z réel donne $z^2 \geq 0$, z imaginaire pur donne $z^2 \leq 0$). z^2 est imaginaire pur quand $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$: c'est la réunion des bissectrices $y = x$ et $y = -x$, privée de O. Les deux ensembles se déduisent l'un de l'autre par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$: multiplier z par $e^{i\frac{\pi}{4}}$ multiplie z^2 par i, ce qui échange réels et imaginaires purs. **Contrôle** : $(1 + i)^2 = 2i$ et $(3i)^2 = -9$.

Réponse. z^2 réel : la réunion des deux axes, privée de O · z^2 imaginaire pur : la réunion des bissectrices $y = \pm x$, privée de O.

Correction de l'exercice 11 – Une somme avec un inverse

Avec $z = x + iy$ non nul, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. La partie imaginaire de $z + \frac{1}{z}$ vaut donc

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Elle est nulle si et seulement si $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$: l'ensemble est l'axe des réels privé de O, réuni au cercle unité. Sur le cercle unité, c'est immédiat : $\frac{1}{z} = \overline{z}$ et $z + \frac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. **Contrôle** : $z = 2$ donne 2,5 ; $z = i$ donne 0 ; $z = 1 + i$ donne $1{,}5 + 0{,}5i$, non réel.

Réponse. L'axe des réels privé de O, réuni au cercle unité (car $|z| = 1$ donne $z + \frac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)$).

Correction de l'exercice 12 – Intersection de deux ensembles

C est le cercle de centre $\Omega(2)$ et de rayon 2, d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. D est la médiatrice de $[OA]$ avec $A(4)$: $x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + y^2$ donne $x = 2$. On remplace dans l'équation du cercle :

$$0 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

Les points communs sont $2 + 2i$ et $2 - 2i$. **Vérification** : $|2i| = 2$, et $|2 + 2i| = |-2 + 2i| = \sqrt{8}$. La droite $x = 2$ passe par le centre du cercle : elle le coupe en deux points diamétralement opposés, distants de 4.

Réponse. Deux points : $z = 2 + 2i$ et $z = 2 - 2i$ (extrémités du diamètre vertical de C).

Correction de l'exercice 13 – Un disque

La condition $|z - i| \leq 3$ décrit le disque fermé de centre $\Omega(0\,;1)$ et de rayon 3 (bord compris, l'inégalité étant large) ; la condition $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ décrit le demi-plan $x \geq 0$. La droite $x = 0$ passant par Ω, l'intersection est un demi-disque, d'aire

$$\frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \approx 14{,}14$$

Le point $2 + 3i$ est à la distance $|2 + 2i| = \sqrt{8} \approx 2{,}83 \leq 3$ de Ω, et sa partie réelle 2 est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

positive : il appartient au domaine. En revanche, $-1+i$ est dans le disque mais pas dans le demi-plan, et $4+i$ est hors du disque.

Réponse. Le demi-disque droit du disque fermé de centre $\Omega(i)$ et de rayon 3 (aire $\frac{9\pi}{2}$). Oui, $2+3i$ y appartient : sa distance à Ω vaut $2\sqrt{2} \approx 2{,}83 \le 3$ et sa partie réelle est positive.

Correction de l’exercice 14 – Une équation en z et son conjugué

Avec $z = x+iy$, on a $z\overline{z} = x^2+y^2$ et $z+\overline{z} = 2x$, donc l’équation devient

$$x^2+y^2+6x-4=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2 = 13$$

C’est le cercle de centre $\Omega(-3\,;0)$ et de rayon $\sqrt{13}$, c’est-à-dire l’ensemble des points tels que $|z+3| = \sqrt{13}$. **Vérification** de cette écriture : $|z+3|^2 = (z+3)(\overline{z}+3) = z\overline{z}+3z+3\overline{z}+9$, et $|z+3|^2 = 13$ redonne bien l’équation de départ. **Contrôle** : $z = -3+i\sqrt{13}$ donne $9+13-18-4=0$.

Réponse. Le cercle de centre Ω d’affixe -3 et de rayon $\sqrt{13}$, d’équation complexe $|z+3| = \sqrt{13}$.

Correction de l’exercice 15 – Couverture de deux antennes

a) M est couvert par A si $|z| \le 5$, et par B si $|z-6| \le 4$: la double couverture est l’intersection des deux disques.

b) Les points limites vérifient $x^2+y^2 = 25$ et $(x-6)^2+y^2 = 16$. En soustrayant, $-12x+36 = -9$, donc $x = \frac{45}{12} = 3{,}75$, puis $y^2 = 25-14{,}0625 = 10{,}9375$:

$$z \approx 3{,}750 \pm 3{,}307\,i$$

Vérification : $\sqrt{14{,}06+10{,}94} = 5$ et $\sqrt{5{,}06+10{,}94} = 4$.

c) Sur l’axe des réels, A couvre $[-5\,;5]$ et B couvre $[2\,;10]$: la double couverture va de 2 à 5, soit 3 km. Elle existe parce que $5+4=9$ dépasse la distance 6 entre les antennes ; c’est elle qui permet de passer d’une antenne à l’autre sans coupure.

Réponse. a) $|z| \le 5$ et $|z-6| \le 4$ · b) $z \approx 3{,}750 \pm 3{,}307\,i$ · c) de 2 à 5, soit 3 km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).