

Plaquette 5 - Synthèse : configurations, démonstrations et problèmes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le dictionnaire complet du chapitre.

objet géométrique	traduction complexe
distance AB	$ z_B - z_A $
milieu de $[AB]$	$\frac{z_A + z_B}{2}$
centre de gravité de ABC	$\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$z_B - z_A = z_D - z_C$
angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	$\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
alignement de A, B, C	ce quotient est réel
$(AB) \perp (AC)$	ce quotient est imaginaire pur

Quelques caractérisations à savoir redémontrer.

- $ABCD$ est un **carré direct** si et seulement si $z_C - z_B = i(z_B - z_A)$ et $z_D - z_C = i(z_C - z_B)$.
- ABC est **équilatéral** si et seulement si $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$.
- **Aire** d'un triangle : $A = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\overline{(z_B - z_A)} (z_C - z_A) \right) \right|$.

Symétries axiales par le conjugué.

axe des réels $\Rightarrow z' = \bar{z}$ axe des imaginaires $\Rightarrow z' = -\bar{z}$ droite $y = x \Rightarrow z' = i\bar{z}$

Plus généralement, la symétrie d'axe la droite passant par O et d'angle θ s'écrit $z' = e^{2i\theta} \bar{z}$.

Rotation envoyant A sur B . Une rotation d'angle θ envoyant A sur B a pour centre l'unique point Ω tel que $z_B - z_\Omega = e^{i\theta}(z_A - z_\Omega)$, soit

$$z_\Omega = \frac{z_B - e^{i\theta} z_A}{1 - e^{i\theta}}$$

Correction de l'exercice 1 - Compléter un carré

- **Caractérisation** : dans un carré direct, chaque côté s'obtient du précédent par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ ✓
- **Traduction** : $z_C - z_B = i(z_B - z_A)$ ✓
- **Premier vecteur** : $z_B - z_A = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$ ✓
- **Rotation** : $i(3 + i) = 3i - 1 = -1 + 3i$ ✓
- **Affixe de C** : $z_B + (-1 + 3i) = (4 + 2i) + (-1 + 3i)$ ✓
- **Résultat** :

$$z_C = 3 + 5i$$

- **Côté suivant** : $z_D - z_C = i(z_C - z_B)$ ✓
- **Rotation** : $i(-1 + 3i) = -i - 3 = -3 - i$ ✓
- **Affixe de D** : $(3 + 5i) + (-3 - i)$ ✓
- **Résultat** :

$$z_D = 4i$$

- **Contrôle du parallélogramme** : $z_D - z_A = 4i - 1 - i = -1 + 3i$ ✓
- **Comparaison** : $z_C - z_B = -1 + 3i$ ✓
- **Cohérence** : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, c'est bien un parallélogramme ✓
- **Longueur AB** : $|3 + i| = \sqrt{10} \approx 3,162$ ✓
- **Longueur BC** : $|-1 + 3i| = \sqrt{10}$ ✓
- **Cohérence** : côtés consécutifs égaux ✓
- **Diagonale AC** : $z_C - z_A = 2 + 4i$, de module $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ✓
- **Test** : la diagonale d'un carré de côté c vaut $c\sqrt{2}$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{20}$ ✓
- **Conclusion** : $ABCD$ est bien un carré, de côté $\sqrt{10}$ et d'aire 10 ✓

Réponse. $z_C = 3 + 5i$ et $z_D = 4i$; carré de côté $\sqrt{10}$, de diagonale $2\sqrt{5}$ et d'aire 10.

Correction de l'exercice 2 - Une caractérisation du triangle équilatéral

- **Rappels sur j** : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$ ✓
- **a) Membre de gauche** : $1^2 + j^2 + (j^2)^2$ ✓
- **Dernier terme** : $j^4 = j^3 \times j = j$ ✓
- **Somme** : $1 + j^2 + j$ ✓
- **Valeur** : 0, d'après la relation fondamentale ✓
- **Membre de droite** : $1 \times j + j \times j^2 + j^2 \times 1$ ✓
- **Deuxième terme** : $j^3 = 1$ ✓
- **Somme** : $j + 1 + j^2$ ✓
- **Valeur** : 0 ✓
- **Conclusion** : les deux membres valent 0, le critère est vérifié ✓
- **Cohérence** : les trois points sont les racines cubiques de l'unité, sommets d'un triangle équilatéral ✓
- **b) Membre de gauche** : $0 + 16 + (2 + 2i)^2$ ✓
- **Carré** : $4 + 8i - 4 = 8i$ ✓
- **Somme** : $16 + 8i$ ✓
- **Membre de droite** : $0 \times 4 + 4(2 + 2i) + (2 + 2i) \times 0$ ✓
- **Valeur** : $8 + 8i$ ✓
- **Comparaison** : $16 + 8i \neq 8 + 8i$ ✓
- **Conclusion** : le triangle n'est **pas** équilatéral ✓
- **Vérification par les longueurs** : $|4 - 0| = 4$ ✓
- **Deuxième côté** : $|2 + 2i| = 2\sqrt{2} \approx 2,828$ ✓
- **Comparaison** : $4 \neq 2\sqrt{2}$ ✓
- **Cohérence** : conforme au critère ✓
- **Nature réelle du triangle** : $|2 + 2i - 4| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Conclusion** : il est isocèle, et même rectangle en $2 + 2i$ ✓

Réponse. a) les deux membres valent 0 · b) non : $16 + 8i \neq 8 + 8i$; le triangle est en fait rectangle isocèle en $2 + 2i$.

Correction de l'exercice 3 - Centre de gravité

— a) Formule du cours :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

— Somme des parties réelles : $2 - 1 + 5 = 6$ ✓

— Somme des parties imaginaires : $1 + 4 - 2 = 3$ ✓

— Somme : $6 + 3i$ ✓

— Division par 3 :

$$z_G = 2 + i$$

— Observation : G a la même affixe que A ✓

— Attention : ce n'est pas une erreur, cela signifie que $G = A$ ✓

— Vérification : la somme $z_B + z_C = (-1 + 4i) + (5 - 2i) = 4 + 2i$ ✓

— Or : $2z_A = 4 + 2i$ ✓

— Donc : $z_B + z_C = 2z_A$, c'est bien la condition pour $G = A$ ✓

— b) Milieu A' de $[BC]$: $\frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ ✓

— Constat : $A' = A = G$ ✓

— Conséquence : le triangle est **aplati**, A est le milieu de $[BC]$ ✓

— Vérification de l'alignement : $z_B - z_A = -3 + 3i$ ✓

— Et : $z_C - z_A = 3 - 3i$ ✓

— Quotient : -1 , réel ✓

— Conclusion : A, B, C sont alignés, il n'y a pas de vrai triangle ✓

— Leçon : le calcul du centre de gravité a **révélé** la dégénérescence ✓

— Un vrai exemple, pour comparer : avec C d'affixe $5 + 2i$ ✓

— Nouveau centre : $\frac{(2 + i) + (-1 + 4i) + (5 + 2i)}{3} = \frac{6 + 7i}{3} = 2 + \frac{7}{3}i$ ✓

— Milieu de $[BC]$: $\frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$ ✓

— Contrôle du tiers : $z_G - z_A = \frac{4}{3}i$ et $z_{A'} - z_A = 2i$ ✓

— Quotient : $\frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$ ✓

— Cohérence : G est bien aux deux tiers de la médiane à partir de A ✓

Réponse. a) $z_G = 2 + i$ — c'est-à-dire $G = A$ · b) les trois points sont en fait **alignés**, A étant le milieu de $[BC]$: le triangle est aplati.

Correction de l'exercice 4 - Le parallélogramme de Varignon

— Affixes des milieux : $z_I = \frac{a + b}{2}$ ✓

— Suite : $z_J = \frac{b + c}{2}$, $z_K = \frac{c + d}{2}$, $z_L = \frac{d + a}{2}$ ✓

— Critère du parallélogramme : $\vec{IJ} = \vec{LK}$ ✓

— Premier vecteur : $z_J - z_I = \frac{b + c}{2} - \frac{a + b}{2}$ ✓

— Le terme b se simplifie ✓

— Résultat :

$$z_{IJ} = \frac{c-a}{2}$$

- **Second vecteur** : $z_K - z_L = \frac{c+d}{2} - \frac{d+a}{2} \checkmark$
- **Le terme d se simplifie** $\checkmark$
- **Résultat** : $z_{LK} = \frac{c-a}{2} \checkmark$
- **Comparaison** : les deux affixes sont **égales** $\checkmark$
- **Conclusion** : $\vec{IJ} = \vec{LK}$, donc $IJKL$ est un parallélogramme $\checkmark$
- **Portée du résultat** : aucune hypothèse n'a été faite sur $ABCD$ $\checkmark$
- **Conséquence** : le résultat vaut même si $ABCD$ est croisé ou non convexe $\checkmark$
- **Lecture supplémentaire** : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ $\checkmark$
- **Interprétation** : (IJ) est parallèle à la diagonale (AC) et deux fois plus courte $\checkmark$
- **Nom de ce résultat** : c'est le **théorème de Varignon** $\checkmark$
- **Contrôle sur un exemple** : $a = 0, b = 4, c = 5 + 3i, d = 1 + 4i$ $\checkmark$
- **Milieux** : $z_I = 2, z_J = \frac{9+3i}{2}, z_K = 3 + \frac{7}{2}i, z_L = \frac{1+4i}{2}$ $\checkmark$
- **Vecteur $\vec{IJ}$** : $\frac{9+3i}{2} - 2 = \frac{5+3i}{2}$ $\checkmark$
- **Vecteur $\vec{LK}$** : $3 + \frac{7}{2}i - \frac{1+4i}{2} = \frac{5+3i}{2}$ $\checkmark$
- **Cohérence** : les deux vecteurs coïncident, et valent bien $\frac{c-a}{2}$ $\checkmark$

Réponse. $z_{IJ} = z_{LK} = \frac{c-a}{2}$: $IJKL$ est toujours un parallélogramme, dont les côtés sont parallèles aux diagonales de $ABCD$ (théorème de Varignon).

Correction de l'exercice 5 - Symétries axiales

- **a) Symétrie d'axe des réels** : elle change y en $-y$ $\checkmark$
- **Expression complexe** : $z' = \bar{z}$ $\checkmark$
- **Image** :

$$z' = 3 + 2i$$

- **Symétrie d'axe $y = x$** : elle échange l'abscisse et l'ordonnée $\checkmark$
- **Le point M a pour coordonnées** : $(3; -2)$ $\checkmark$
- **Image** : $(-2; 3)$ $\checkmark$
- **Affixe** :

$$z' = -2 + 3i$$

- **b) Démonstration** : on part de $z = x + iy$ $\checkmark$
- **Conjugué** : $\bar{z} = x - iy$ $\checkmark$
- **On multiplie par i** : $i(x - iy) = ix - i^2y$ $\checkmark$
- **Simplification** : $y + ix$ $\checkmark$
- **Lecture** : c'est l'affixe du point de coordonnées $(y; x)$ $\checkmark$
- **Conclusion** : l'abscisse et l'ordonnée sont bien échangées $\checkmark$
- **Expression démontrée** :

$$z' = i\bar{z}$$

- **Contrôle sur M** : $i \times \overline{(3 - 2i)} = i(3 + 2i)$ $\checkmark$
- **Calcul** : $3i - 2 = -2 + 3i$ $\checkmark$
- **Cohérence** : conforme au a) $\checkmark$

- **Contrôle des points fixes** : $z = i\bar{z}$ avec $z = x + iy$ ✓
- **Équation** : $x + iy = y + ix$ ✓
- **Identification** : $x = y$ ✓
- **Cohérence** : les points fixes forment bien la droite $y = x$ ✓
- **Formule générale** : la symétrie d'axe la droite passant par O et d'angle θ s'écrit $z' = e^{2i\theta}\bar{z}$ ✓
- **Ici** : $\theta = \frac{\pi}{4}$, donc $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ✓

Réponse. a) $3 + 2i$ puis $-2 + 3i$ · b) $i\bar{z} = i(x - iy) = y + ix$, qui est l'affixe du point $(y; x)$.

Correction de l'exercice 6 - Trouver le centre d'une rotation

- **Écriture de la rotation** : $z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$ ✓
- **Valeur de l'exponentielle** : i ✓
- **Condition imposée** : $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$ ✓
- **Substitution** : $3 + 2i - z_\Omega = i(1 - z_\Omega)$ ✓
- **Développement du second membre** : $i - iz_\Omega$ ✓
- **On regroupe les z_Ω** : $-z_\Omega + iz_\Omega = i - 3 - 2i$ ✓
- **Second membre** : $-3 - i$ ✓
- **Factorisation** : $z_\Omega(i - 1) = -3 - i$ ✓
- **Division** : $z_\Omega = \frac{-3 - i}{i - 1}$ ✓
- **On multiplie par le conjugué $-1 - i$** ✓
- **Dénominateur** : $(-1 + i)(-1 - i) = 1 + 1 = 2$ ✓
- **Numérateur** : $(-3 - i)(-1 - i) = 3 + 3i + i - 1$ ✓
- **Simplification** : $2 + 4i$ ✓
- **Centre** :

$$z_\Omega = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

- **Vérification** : $z_A - z_\Omega = 1 - (1 + 2i) = -2i$ ✓
- **On multiplie par i** : $-2i^2 = 2$ ✓
- **On ajoute le centre** : $2 + 1 + 2i = 3 + 2i$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve bien z_B ✓
- **Contrôle des distances** : $\Omega A = |-2i| = 2$ ✓
- **Et** : $\Omega B = |3 + 2i - 1 - 2i| = 2$ ✓
- **Cohérence** : le centre est équidistant de A et B , comme attendu ✓
- **Remarque** : le centre est donc sur la médiatrice de $[AB]$ — c'est une construction géométrique alternative ✓

Réponse. $z_\Omega = 1 + 2i$.

Correction de l'exercice 7 - Triangles rectangles isocèles sur les côtés

- **Traduction de l'hypothèse** : $z_B - z_P = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_P)$ ✓
- **Justification** : l'angle en P vaut $\frac{\pi}{2}$, et $PA = PB$ car le triangle est isocèle ✓
- **Conséquence** : le quotient est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, c'est donc i ✓
- **Équation** : $b - z_P = i(a - z_P)$ ✓
- **Développement** : $b - z_P = ia - iz_P$ ✓
- **On regroupe** : $-z_P + iz_P = ia - b$ ✓

— **Factorisation** : $z_P(i - 1) = ia - b$ ✓

— **Division** :

$$z_P = \frac{ia - b}{i - 1}$$

— **On rationalise** : on multiplie par $-1 - i$ ✓

— **Dénominateur** : $(i - 1)(-1 - i) = -i + 1 - i^2 + i \cdot$ ✓

— **Calcul détaillé** : $-i - i^2 + 1 + i = -i + 1 + 1 + i = 2$ ✓

— **Numérateur** : $(ia - b)(-1 - i) = -ia - i^2a + b + bi$ ✓

— **Simplification** : $a - ia + b + ib$ ✓

— **Expression finale** :

$$z_P = \frac{a + b + i(b - a)}{2}$$

— **Lecture géométrique** : $\frac{a+b}{2}$ est le **milieu** de $[AB]$ ✓

— **Le terme restant** : $\frac{i(b-a)}{2}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et de longueur $\frac{AB}{2}$ ✓

— **Conclusion** : P est le sommet du demi-carré construit sur $[AB]$ ✓

— **Application numérique** : $a = 0, b = 4$ ✓

— **Calcul** : $\frac{0 + 4 + i(4 - 0)}{2} = \frac{4 + 4i}{2}$ ✓

— **Résultat** : $z_P = 2 + 2i$ ✓

— **Vérification** : $PA = |0 - 2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ et $PB = |4 - 2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ ✓

— **Test de Pythagore** : $8 + 8 = 16 = AB^2$ ✓

Réponse. $z_P = \frac{a + b + i(b - a)}{2}$; pour $a = 0$ et $b = 4$: $z_P = 2 + 2i$.

Correction de l'exercice 8 - Trois points de module 1 de somme nulle

— **Première conséquence de $|a| = 1$** : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ ✓

— **Justification** : $a\bar{a} = |a|^2 = 1$ ✓

— **De même** : $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{c} = \frac{1}{c}$ ✓

— **On conjugue l'hypothèse** : $\overline{a + b + c} = \bar{0} = 0$ ✓

— **Donc** : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ✓

— **Mise au même dénominateur** :

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = 0$$

— **Le dénominateur est non nul** : $|abc| = 1 \neq 0$ ✓

— **Donc** : $ab + bc + ca = 0$ ✓

— **Identité à utiliser** : $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ ✓

— **Substitution** : $0^2 - 2 \times 0$ ✓

— **Résultat** : $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ✓

— **Critère du triangle équilatéral** : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ✓

— **Comparaison** : les deux membres valent 0 ✓

— **Conclusion** : le triangle est **équilatéral** ✓

— **Interprétation** : $a + b + c = 0$ signifie que le centre de gravité est l'origine ✓

— **Et $|a| = |b| = |c| = 1$** : les trois points sont sur le cercle unité ✓

- **Lecture combinée** : le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit ✓
- **Or** : cette coïncidence caractérise précisément le triangle équilatéral ✓
- **Exemple** : $1, j, j^2$ ✓
- **Vérification** : leur somme vaut 0 et leurs modules valent 1 ✓

Réponse. En conjuguant, $ab + bc + ca = 0$; avec $a + b + c = 0$, l'identité donne $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, donc le critère $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ est vérifié : le triangle est équilatéral.

Correction de l'exercice 9 - Aire d'un triangle

- **a) Vecteurs** : $z_B - z_A = 1$ et $z_C - z_A = i$ ✓
- **Conjugué du premier** : $\bar{1} = 1$ ✓
- **Produit** : $1 \times i = i$ ✓
- **Partie imaginaire** : 1 ✓
- **Aire** : $\frac{1}{2} \times 1 = 0,5$ ✓
- **Vérification directe** : c'est un triangle rectangle en O , de côtés 1 et 1 ✓
- **Aire** : $\frac{1 \times 1}{2} = 0,5$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **b) Premier vecteur** : $z_B - z_A = (5 + 2i) - (1 + i) = 4 + i$ ✓
- **Second vecteur** : $z_C - z_A = (3 + 6i) - (1 + i) = 2 + 5i$ ✓
- **Conjugué du premier** : $4 - i$ ✓
- **Produit** : $(4 - i)(2 + 5i) = 8 + 20i - 2i + 5$ ✓
- **Simplification** : $13 + 18i$ ✓
- **Partie imaginaire** : 18 ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{18}{2} = 9 \text{ unités d'aire}$$

- **Contrôle par le déterminant** : $\overrightarrow{AB}(4; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 5)$ ✓
- **Déterminant** : $4 \times 5 - 1 \times 2 = 18$ ✓
- **Aire** : la moitié de la valeur absolue, soit 9 ✓
- **Cohérence** : la formule complexe **est** la formule du déterminant ✓
- **Justification** : $\text{Im}(\bar{z}_w) = x_z y_w - y_z x_w$ ✓
- **Signe** : la partie imaginaire est positive, le triangle est orienté dans le sens **direct** ✓
- **Contrôle de plausibilité** : $AB = \sqrt{17} \approx 4,12$ et $AC = \sqrt{29} \approx 5,39$ ✓
- **Majoration** : l'aire est au plus $\frac{AB \times AC}{2} \approx 11,1$ ✓
- **Cohérence** : $9 \leq 11,1$ ✓

Réponse. a) la formule donne 0,5, conforme · b) $A = 9$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 10 - Intersection de deux droites

- **Méthode** : passer par les équations cartésiennes ✓
- **Vecteur directeur de (AB)** : $z_B - z_A = 4 + 2i$, soit $(4; 2)$ ✓
- **Simplification** : $(2; 1)$ ✓
- **Coefficient directeur** : $\frac{1}{2}$ ✓

- **Équation de (AB) :** $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \checkmark$
 - **Forme réduite :** $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \checkmark$
 - **Vecteur directeur de (CD) :** $z_D - z_C = 4 - 6i$, soit $(4; -6) \checkmark$
 - **Simplification :** $(2; -3) \checkmark$
 - **Coefficient directeur :** $-\frac{3}{2} \checkmark$
 - **Équation de (CD) :** $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 2) \checkmark$
 - **Forme réduite :** $y = -\frac{3x}{2} + 8 \checkmark$
 - **Système :** $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3x}{2} + 8 \checkmark$
 - **On multiplie par 2 :** $x + 1 = -3x + 16 \checkmark$
 - **Résolution :** $4x = 15$, donc $x = \frac{15}{4} = 3,75 \checkmark$
 - **Ordonnée :** $y = \frac{3,75}{2} + 0,5 = 2,375 \checkmark$
 - **Affixe du point d'intersection :**

$$z = 3,75 + 2,375i$$
 - **Vérification dans la seconde équation :** $-\frac{3}{2} \times 3,75 + 8 = -5,625 + 8 = 2,375 \checkmark$
 - **Cohérence :** conforme $\checkmark$
 - **Contrôle d'alignement avec A et B :** $z - z_A = 2,75 + 1,375i \checkmark$
 - **Comparaison avec $z_B - z_A = 4 + 2i$:** le quotient vaut $0,6875 \checkmark$
 - **Nature :** réel, donc les trois points sont alignés $\checkmark$
 - **Remarque :** $0,6875 \in]0; 1[$, le point est **entre** A et B $\checkmark$
- Réponse.** $z = \frac{15}{4} + \frac{19}{8}i = 3,75 + 2,375i$.

Correction de l'exercice 11 - Une suite de triangles emboîtés

- **a) Milieux :** celui de $[0; 6]$ est $3 \checkmark$
- **Deuxième :** celui de $[6; 3 + 6i]$ vaut $\frac{9 + 6i}{2} = 4,5 + 3i \checkmark$
- **Troisième :** celui de $[3 + 6i; 0]$ vaut $1,5 + 3i \checkmark$
- **Sommets de T_1 :**

$$3 \quad 4,5 + 3i \quad 1,5 + 3i$$
- **Centre de gravité de T_0 :** $\frac{0 + 6 + 3 + 6i}{3} = \frac{9 + 6i}{3} \checkmark$
- **Résultat :** $z_G = 3 + 2i \checkmark$
- **b) Sommets de T_1 en fonction de ceux de T_0 :** $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \checkmark$
- **Somme :** $\frac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c \checkmark$
- **Centre de gravité de T_1 :** $\frac{a+b+c}{3} \checkmark$
- **Conclusion :** c'est exactement celui de $T_0 \checkmark$
- **Par récurrence :** tous les T_n ont le même centre de gravité $G(3 + 2i) \checkmark$
- **Contrôle :** $\frac{3 + 4,5 + 3i + 1,5 + 3i}{3} = \frac{9 + 6i}{3} = 3 + 2i \checkmark$
- **c) Nature du passage de T_n à T_{n+1} :** c'est l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2} \checkmark$

- **Vérification** : $\frac{b+c}{2} - g = \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{3} \checkmark$
- **Mise au même dénominateur** : $\frac{3b+3c-2a-2b-2c}{6} = \frac{b+c-2a}{6} \checkmark$
- **Comparaison avec $a - g$** : $a - \frac{a+b+c}{3} = \frac{2a-b-c}{3} \checkmark$
- **Rapport** : $\frac{(b+c-2a)/6}{(2a-b-c)/3} = -\frac{1}{2} \checkmark$
- **Effet sur les aires** : elles sont multipliées par $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \checkmark$
- **Aire de T_0** : base 6, hauteur 6 $\checkmark$
- **Calcul** : $\frac{6 \times 6}{2} = 18 \checkmark$
- **Aire de T_n** :

$$A_n = 18 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- **Contrôle** : $A_1 = 4,5$, et le triangle des milieux vaut bien le quart $\checkmark$
- **Limite** : $A_n \rightarrow 0$, les triangles se contractent vers G $\checkmark$

Réponse. a) sommets 3, $4,5 + 3i$, $1,5 + 3i$; $z_G = 3 + 2i$ · b) la somme des sommets est conservée · c) $A_n = 18 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Correction de l'exercice 12 - Cocyclicité et angle inscrit

- **a) Premier quotient, numérateur** : $z_A - z_B = 1 - i \checkmark$
- **Dénominateur** : $z_C - z_B = -1 - i \checkmark$
- **Quotient** : $\frac{1-i}{-1-i} \checkmark$
- **On multiplie par le conjugué $-1 + i$** $\checkmark$
- **Dénominateur** : $1 + 1 = 2 \checkmark$
- **Numérateur** : $(1-i)(-1+i) = -1 + i + i + 1 = 2i \checkmark$
- **Quotient** : $i \checkmark$
- **Argument** :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- **Interprétation** : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$, l'angle en B est droit $\checkmark$
- **Second quotient, numérateur** : $z_A - z_M = 1 + i \checkmark$
- **Dénominateur** : $z_C - z_M = -1 + i \checkmark$
- **Quotient** : $\frac{1+i}{-1+i} \checkmark$
- **On multiplie par le conjugué $-1 - i$** $\checkmark$
- **Dénominateur** : $2 \checkmark$
- **Numérateur** : $(1+i)(-1-i) = -1 - i - i + 1 = -2i \checkmark$
- **Quotient** : $-i \checkmark$
- **Argument** :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_M}{z_C - z_M}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

- **b) Comparaison** : $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ diffèrent de $\pi \checkmark$
- **Modulo π** : les deux angles sont **égaux** $\checkmark$
- **Conclusion** : B et M voient $[AC]$ sous le même angle, modulo $\pi \checkmark$

- **Théorème illustré** : c'est le **théorème de l'angle inscrit** ✓
- **Cas particulier ici** : $[AC]$ est un **diamètre** du cercle unité ✓
- **Conséquence** : tout point du cercle voit $[AC]$ sous un angle droit ✓
- **Nom** : c'est le théorème du cercle de Thalès ✓
- **Cohérence** : $|1| = |i| = |-1| = |-i| = 1$, les quatre points sont bien cocycliques ✓
- **Explication de la différence de signe** : B et M sont de part et d'autre de (AC) ✓

Réponse. a) $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ · b) les deux angles sont égaux **modulo** π : B et M voient $[AC]$ sous le même angle, ce qui illustre le théorème de l'angle inscrit (ici $[AC]$ est un diamètre, donc les angles sont droits).

Correction de l'exercice 13 - Une ligne de niveau d'un produit

- **Traduction** : avec $A(1)$ et $B(-1)$, la condition s'écrit $AM \times BM = 1$ ✓
- **Remarque** : c'est un **produit** de distances, pas une somme ni un quotient ✓
- **Conséquence** : ce n'est ni un cercle ni une ellipse ✓
- **Méthode** : élever au carré et poser $z = x + iy$ ✓
- **Écriture compacte** : $|z^2 - 1| = 1$ ✓
- **Justification** : $|z - 1||z + 1| = |(z - 1)(z + 1)|$ ✓
- **Calcul de z^2** : $x^2 - y^2 + 2ixy$ ✓
- **Donc** : $z^2 - 1 = (x^2 - y^2 - 1) + 2ixy$ ✓
- **Module au carré** : $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 1$ ✓
- **Équation cartésienne** :

$$(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 1$$

- **Nom de cette courbe** : c'est une **lemniscate de Bernoulli** ✓
- **Forme** : elle a l'allure d'un 8 couché, centré à l'origine ✓
- **Test de l'origine** : $z = 0$ ✓
- **Premier facteur** : $|0 - 1| = 1$ ✓
- **Second facteur** : $|0 + 1| = 1$ ✓
- **Produit** : 1 ✓
- **Conclusion** : oui, la courbe passe par l'**origine** ✓
- **Contrôle par l'équation** : $(0 - 0 - 1)^2 + 0 = 1$ ✓
- **Autres points remarquables** : sur l'axe des réels, $y = 0$ ✓
- **Équation** : $(x^2 - 1)^2 = 1$, donc $x^2 - 1 = \pm 1$ ✓
- **Solutions** : $x^2 = 2$ ou $x^2 = 0$ ✓
- **Points** : $x = \pm\sqrt{2}$ et $x = 0$ ✓
- **Cohérence** : trois points sur l'axe des réels, dont le point double à l'origine ✓

Réponse. $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 1$: une lemniscate de Bernoulli, qui passe bien par l'origine et coupe l'axe des réels en $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Les trois pales d'une éolienne

- **a) Répartition régulière** : les trois pales sont séparées de $\frac{2\pi}{3}$ ✓
- **Affixes des trois extrémités** :

$$z_k = 90i + 40e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{3})} \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

- **Interprétation** : chaque extrémité est sur le cercle de centre $90i$ et de rayon 40 ✓
- **b) Hauteur** : c'est la **partie imaginaire** de l'affixe ✓
- **Formule** : $h_k = 90 + 40 \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)$ ✓
- **Première pale** : $\theta = \frac{\pi}{6}$ ✓
- **Sinus** : $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Hauteur** : $90 + 20 = 110$ m ✓
- **Deuxième pale** : $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ✓
- **Sinus** : $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Hauteur** : 110 m ✓
- **Troisième pale** : $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ✓
- **Sinus** : $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ✓
- **Hauteur** : $90 - 40 = 50$ m ✓
- **Contrôle** : la somme des trois sinus vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ ✓
- **Explication** : c'est la partie imaginaire de $1 + j + j^2 = 0$ ✓
- **Conséquence** : la somme des trois hauteurs vaut toujours 270 m ✓
- **c) Encadrement du sinus** : $-1 \leq \sin u \leq 1$ ✓
- **Hauteur maximale** :

$$h_{\max} = 90 + 40 = 130 \text{ m}$$

- **Hauteur minimale** : $90 - 40 = 50$ m ✓
- **Garde au sol** : 50 m, largement suffisante ✓
- **Remarque pratique** : ces deux valeurs sont les données réglementaires d'un permis de construire éolien ✓
- **Position du maximum** : $\theta + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, la pale est verticale vers le haut ✓

Réponse. a) $z_k = 90i + 40 e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{3})}$ · b) 110 m, 110 m et 50 m · c) de 50 m à 130 m.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : une configuration complète

- **a) Premier vecteur** : $b - a = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$ ✓
- **Second vecteur** : $c - a = (2 + 5i) - (1 + i) = 1 + 4i$ ✓
- **Quotient** : $Z = \frac{1 + 4i}{3 + i}$ ✓
- **On multiplie par le conjugué** $3 - i$ ✓
- **Dénominateur** : $9 + 1 = 10$ ✓
- **Numérateur** : $(1 + 4i)(3 - i) = 3 - i + 12i + 4$ ✓
- **Simplification** : $7 + 11i$ ✓
- **Quotient** :

$$Z = \frac{7 + 11i}{10} = 0,7 + 1,1i$$

- **Test « réel »** : la partie imaginaire vaut $1,1 \neq 0$, les points ne sont pas alignés ✓
- **Test « imaginaire pur »** : la partie réelle vaut $0,7 \neq 0$, l'angle en A n'est pas droit ✓
- **Module de Z** : $\sqrt{0,49 + 1,21} = \sqrt{1,7} \approx 1,304$ ✓
- **Test « isocèle »** : le module diffère de 1 , donc $AB \neq AC$ ✓

- **Autres côtés** : $c - b = (2 + 5i) - (4 + 2i) = -2 + 3i$ ✓
- **Longueurs** : $AB = \sqrt{10} \approx 3,162$, $AC = \sqrt{17} \approx 4,123$, $BC = \sqrt{13} \approx 3,606$ ✓
- **Test de Pythagore** : $10 + 13 = 23 \neq 17$ ✓
- **Conclusion** : le triangle ABC est **quelconque** — ni isocèle, ni rectangle ✓
- **b) Formule de l'aire** : $\frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\overline{(b-a)}(c-a) \right) \right|$ ✓
- **Conjugué** : $\overline{3+i} = 3-i$ ✓
- **Produit** : $(3-i)(1+4i) = 3 + 12i - i + 4 = 7 + 11i$ ✓
- **Partie imaginaire** : 11 ✓
- **Aire** :

$$A = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ unités d'aire}$$

- **c) Condition** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $z_D = c - b + a$ ✓
- **Calcul** : $(2 + 5i) - (4 + 2i) + (1 + i)$ ✓
- **Résultat** : $z_D = -1 + 4i$ ✓
- **Vérification** : $c - z_D = (2 + 5i) - (-1 + 4i) = 3 + i = b - a$ ✓
- **Aire du parallélogramme** : c'est le **double** de celle du triangle ✓
- **Valeur** : 11 unités d'aire ✓

Réponse. a) $Z = 0,7 + 1,1i$: ni réel, ni imaginaire pur, ni de module 1 — le triangle est quelconque · b) $A = 5,5$ · c) $z_D = -1 + 4i$, parallélogramme d'aire 11.