Plaquette 5 – Synthèse : configurations, démonstrations et problèmes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le dictionnaire complet du chapitre.

objet géométrique	traduction complexe
distance AB	$\lvert z_B - z_A\rvert$
milieu de $[AB]$	$\dfrac{z_A + z_B}{2}$
centre de gravité de ABC	$\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$z_B - z_A = z_D - z_C$
angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$	$\arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
alignement de A, B, C	ce quotient est **réel**
$(AB) \perp (AC)$	ce quotient est **imaginaire pur**

Quelques caractérisations à savoir redémontrer.

— $ABCD$ est un **carré direct** si et seulement si $z_C - z_B = i(z_B - z_A)$ et $z_D - z_C = i(z_C - z_B)$.

— ABC est **équilatéral** si et seulement si $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$.

— **Aire** d'un triangle : $A = \dfrac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\left(\overline{(z_B - z_A)}(z_C - z_A)\right)\right|$.

Symétries axiales par le conjugué.

axe des réels $\Rightarrow z' = \overline{z}$ axe des imaginaires $\Rightarrow z' = -\overline{z}$ droite $y = x \Rightarrow z' = i\,\overline{z}$

Plus généralement, la symétrie d'axe la droite passant par O et d'angle θ s'écrit $z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\overline{z}$.

Rotation envoyant A sur B. Une rotation d'angle θ envoyant A sur B a pour centre l'unique point Ω tel que $z_B - z_\Omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z_A - z_\Omega)$, soit

$$z_\Omega = \frac{z_B - \mathrm{e}^{i\theta} z_A}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}$$

Correction de l'exercice 1 – Compléter un carré

Dans un carré direct $ABCD$, chaque côté s'obtient du précédent par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en multipliant son affixe par i :

$$z_C - z_B = i(z_B - z_A) = i(3 + i) = -1 + 3i \qquad z_D - z_C = i(-1 + 3i) = -3 - i$$

d'où $z_C = 4 + 2i - 1 + 3i = 3 + 5i$ et $z_D = 3 + 5i - 3 - i = 4i$. **Vérification** : $z_D - z_A = -1 + 3i = z_C - z_B$, donc $ABCD$ est un parallélogramme ; ses côtés consécutifs $|3 + i|$ et $|-1 + 3i|$ valent tous deux $\sqrt{10}$, et sa diagonale $|2 + 4i| = \sqrt{20} = \sqrt{10} \times \sqrt{2}$. C'est un carré de côté $\sqrt{10}$ et d'aire 10.

Réponse. $z_C = 3 + 5i$ et $z_D = 4i$; carré de côté $\sqrt{10}$, de diagonale $2\sqrt{5}$ et d'aire 10.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Une caractérisation du triangle équilatéral

a) On utilise $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. À gauche, $1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$; à droite, $1 \times j + j \times j^2 + j^2 \times 1 = j + 1 + j^2 = 0$. Les deux membres sont égaux : le triangle $(1\,;j\,;j^2)$, formé des racines cubiques de l'unité, est bien équilatéral.

b) Avec 0, 4 et $2 + 2i$:

$$0 + 16 + (2 + 2i)^2 = 16 + 8i \qquad 0 + 4(2 + 2i) + 0 = 8 + 8i$$

Les deux membres diffèrent : le triangle n'est pas équilatéral. En effet, ses côtés mesurent 4, $|2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $|-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$: il est isocèle en $2 + 2i$, et même rectangle, puisque $8 + 8 = 16$.

Réponse. a) les deux membres valent 0 · b) non : $16 + 8i \neq 8 + 8i$; le triangle est en fait rectangle isocèle en $2 + 2i$.

Correction de l'exercice 3 – Centre de gravité

a) L'affixe du centre de gravité est la moyenne des affixes des sommets :

$$z_G = \frac{(2 + i) + (-1 + 4i) + (5 + 2i)}{3} = \frac{6 + 7i}{3} = 2 + \frac{7}{3}i$$

b) Le milieu A' de $[BC]$ a pour affixe $\dfrac{(-1 + 4i) + (5 + 2i)}{2} = 2 + 3i$. On compare les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$:

$$z_G - z_A = \frac{4}{3}i \qquad z_{A'} - z_A = 2i$$

donc $z_G - z_A = \dfrac{2}{3}(z_{A'} - z_A)$: G est sur la médiane $[AA']$, aux deux tiers à partir de A.
Contrôle : on a bien $z_A + z_B + z_C = 3z_G$, et les points ne sont pas alignés, puisque $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3 + i}{-3 + 3i}$ n'est pas réel.

Réponse. a) $z_G = 2 + \dfrac{7}{3}i$ · b) avec $A'(2 + 3i)$ milieu de $[BC]$, $z_G - z_A = \dfrac{2}{3}(z_{A'} - z_A)$.

Correction de l'exercice 4 – Le parallélogramme de Varignon

Les milieux ont pour affixes $z_I = \dfrac{a + b}{2}$, $z_J = \dfrac{b + c}{2}$, $z_K = \dfrac{c + d}{2}$ et $z_L = \dfrac{d + a}{2}$. On compare $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$:

$$z_J - z_I = \frac{c - a}{2} \qquad z_K - z_L = \frac{c - a}{2}$$

Les deux vecteurs sont égaux, donc $IJKL$ est un parallélogramme, sans aucune hypothèse sur $ABCD$ (même croisé ou non convexe). De plus $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les côtés de $IJKL$ sont parallèles aux diagonales de $ABCD$ et deux fois plus courts (théorème de Varignon).
Contrôle avec $a = 0$, $b = 4$, $c = 5 + 3i$, $d = 1 + 4i$: $z_J - z_I = z_K - z_L = \dfrac{5 + 3i}{2}$.

Réponse. $z_{\overrightarrow{IJ}} = z_{\overrightarrow{LK}} = \dfrac{c - a}{2}$: $IJKL$ est toujours un parallélogramme, dont les côtés sont parallèles aux diagonales de $ABCD$ (théorème de Varignon).

Correction de l'exercice 5 – Symétries axiales

a) La symétrie d'axe des réels change y en $-y$, donc z en $\overline{z}$: l'image de $3 - 2i$ est $3 + 2i$. La symétrie d'axe $y = x$ échange abscisse et ordonnée : $M(3\,;-2)$ a pour image $(-2\,;3)$, d'affixe $-2 + 3i$.

b) Avec $z = x + iy$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$i\overline{z} = i(x - iy) = y + ix$$

qui est l'affixe du point $(y\,;x)$: la transformation $z \mapsto i\overline{z}$ échange bien abscisse et ordonnée. **Contrôle** : $i \times \overline{3 - 2i} = i(3 + 2i) = -2 + 3i$, et ses points fixes vérifient $x + iy = y + ix$, soit $x = y$: c'est la droite $y = x$.

Réponse. a) $3 + 2i$ puis $-2 + 3i \cdot$ b) $i\overline{z} = i(x - iy) = y + ix$, qui est l'affixe du point $(y\,;x)$.

Correction de l'exercice 6 – Trouver le centre d'une rotation

La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'écrit $z' - z_\Omega = i(z - z_\Omega)$. Elle envoie A sur B si

$$3 + 2i - z_\Omega = i(1 - z_\Omega) \Leftrightarrow z_\Omega(i - 1) = -3 - i \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{(-3 - i)(-1 - i)}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

Vérification : $z_A - z_\Omega = -2i$, multiplié par i, donne 2, et $2 + (1 + 2i) = 3 + 2i = z_B$. Le centre est à la distance 2 de A et de B : il est sur la médiatrice de $[AB]$, ce qui donne une construction géométrique.

Réponse. $z_\Omega = 1 + 2i$.

Correction de l'exercice 7 – Triangles rectangles isocèles sur les côtés

Le triangle ABP est rectangle isocèle en P avec $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \frac{\pi}{2}$: $\overrightarrow{PB}$ s'obtient en tournant $\overrightarrow{PA}$ d'un quart de tour, donc $b - z_P = i(a - z_P)$. On isole z_P :

$$z_P(i - 1) = ia - b \Leftrightarrow z_P = \frac{(ia - b)(-1 - i)}{(i - 1)(-1 - i)} = \frac{a + b + i(b - a)}{2}$$

car $(i - 1)(-1 - i) = 2$ et $(ia - b)(-1 - i) = a + b + i(b - a)$. Géométriquement, P s'obtient à partir du milieu de $[AB]$ en se décalant de $\frac{i(b - a)}{2}$, perpendiculairement à (AB), d'une demi-longueur AB. Pour $a = 0$ et $b = 4$: $z_P = 2 + 2i$. **Contrôle** : $PA = PB = 2\sqrt{2}$ et $8 + 8 = 16 = AB^2$.

Réponse. $z_P = \frac{a + b + i(b - a)}{2}$; pour $a = 0$ et $b = 4$: $z_P = 2 + 2i$.

Correction de l'exercice 8 – Trois points de module 1 de somme nulle

Comme $|a| = |b| = |c| = 1$, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. En conjuguant $a + b + c = 0$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = 0$$

donc $ab + bc + ca = 0$ ($abc \neq 0$). Alors $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0$, et le critère $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ est vérifié : le triangle est équilatéral. Géométriquement, son centre de gravité ($a + b + c = 0$) coïncide avec le centre O de son cercle circonscrit, ce qui caractérise le triangle équilatéral. **Exemple** : $1, j, j^2$.

Réponse. En conjuguant, $ab + bc + ca = 0$; avec $a + b + c = 0$, l'identité donne $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, donc le critère $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ est vérifié : le triangle est équilatéral.

Correction de l'exercice 9 – Aire d'un triangle

a) Pour 0, 1, i : $\overline{(1 - 0)}(i - 0) = i$, de partie imaginaire 1, d'où une aire de $\frac{1}{2}$, celle du triangle rectangle de côtés 1 et 1.

b) $z_B - z_A = 4 + i$ et $z_C - z_A = 2 + 5i$, d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\overline{(4+i)}(2+5i) = (4-i)(2+5i) = 13+18i \qquad A = \frac{18}{2} = 9$$

Contrôle : c'est la formule du déterminant, $\mathrm{Im}(\bar{z}w) = x_z y_w - y_z x_w$, et $4\times 5 - 1\times 2 = 18$. L'aire ne dépasse pas $\frac{AB\times AC}{2} \approx \frac{4{,}12\times 5{,}39}{2} \approx 11{,}1$, ce qui est cohérent.

Réponse. a) la formule donne 0,5, conforme · b) $A = 9$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 10 – Intersection de deux droites

(AB) est dirigée par $z_B - z_A = 4+2i$, de coefficient directeur $\frac{1}{2}$, et passe par $(1\,;1)$: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. (CD) est dirigée par $z_D - z_C = 4-6i$, de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$, et passe par $(2\,;5)$: $y = -\frac{3x}{2} + 8$. Au point d'intersection,

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3x}{2} + 8 \Leftrightarrow 4x = 15 \Leftrightarrow x = 3{,}75$$

puis $y = 2{,}375$: le point a pour affixe $3{,}75 + 2{,}375i$. **Contrôle** : $-\frac{3}{2}\times 3{,}75 + 8 = 2{,}375$, et $\frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2{,}75 + 1{,}375i}{4+2i} = 0{,}6875$, réel entre 0 et 1 : le point est sur le segment $[AB]$.

Réponse. $z = \frac{15}{4} + \frac{19}{8}\,i = 3{,}75 + 2{,}375\,i$.

Correction de l'exercice 11 – Une suite de triangles emboîtés

a) Les milieux des côtés sont 3, $\frac{9+6i}{2} = 4{,}5+3i$ et $1{,}5+3i$, et le centre de gravité de T_0 a pour affixe $\frac{0+6+3+6i}{3} = 3+2i$.

b) Si T_n a pour sommets a, b, c, ceux de T_{n+1} sont $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, dont la somme vaut $a+b+c$: le centre de gravité est conservé d'une étape à l'autre, et par récurrence tous les T_n ont le centre de gravité $G(3+2i)$.

c) On vérifie que $\frac{b+c}{2} - g = -\frac{1}{2}(a-g)$: on passe de T_n à T_{n+1} par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, qui multiplie les aires par $\frac{1}{4}$. T_0 a une aire de $\frac{6\times 6}{2} = 18$, donc

$$A_n = 18 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Les triangles se contractent vers G : $A_1 = 4{,}5$, et A_n tend vers 0.

Réponse. a) sommets 3, $4{,}5+3i$, $1{,}5+3i$; $z_G = 3+2i$ · b) la somme des sommets est conservée · c) $A_n = 18 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Correction de l'exercice 12 – Cocyclicité et angle inscrit

a) On calcule les quotients en multipliant par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1-i}{-1-i} = i \qquad \frac{z_A - z_M}{z_C - z_M} = \frac{1+i}{-1+i} = -i$$

d'arguments respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

b) Ces deux angles diffèrent de π : ils sont égaux modulo π. B et M voient le segment $[AC]$ sous le même angle (au sens des droites), ce qu'affirme le théorème de l'angle inscrit pour deux points d'un même cercle passant par A et C. Ici $[AC]$ est un diamètre du cercle

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

unité, donc l'angle est droit (théorème de Thalès) ; la différence de signe vient de ce que B et M sont de part et d'autre de (AC).

Réponse. a) $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ · b) les deux angles sont égaux **modulo** π : B et M voient $[AC]$ sous le même angle, ce qui illustre le théorème de l'angle inscrit (ici $[AC]$ est un diamètre, donc les angles sont droits).

Correction de l'exercice 13 – Une ligne de niveau d'un produit

Avec $A(1)$ et $B(-1)$, la condition $AM \times BM = 1$ porte sur un produit de distances : ce n'est ni un cercle ni une médiatrice. Comme $|z-1|\,|z+1| = |z^2-1|$, et que $z^2 - 1 = (x^2 - y^2 - 1) + 2xy\,i$,

$$\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2y^2 = 1$$

C'est une lemniscate de Bernoulli, en forme de 8 couché centré en O. Elle passe par l'origine : $|0-1| \times |0+1| = 1$. Sur l'axe des réels ($y = 0$), l'équation devient $(x^2-1)^2 = 1$, soit $x^2 = 0$ ou $x^2 = 2$: la courbe coupe l'axe en 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Réponse. $\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2y^2 = 1$: une lemniscate de Bernoulli, qui passe bien par l'origine et coupe l'axe des réels en 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Les trois pales d'une éolienne

a) Les pales sont séparées de $\frac{2\pi}{3}$:

$$z_k = 90i + 40\,\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\}$$

Les extrémités sont sur le cercle de centre $90i$ (le moyeu) et de rayon 40.

b) La hauteur est la partie imaginaire : $h_k = 90 + 40\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)$. Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, les angles sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$, de sinus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et -1 : les hauteurs sont 110 m, 110 m et 50 m.
Contrôle : la somme des trois sinus est nulle (partie imaginaire de $1 + j + j^2 = 0$), donc la somme des hauteurs vaut toujours 270 m.

c) Le sinus étant compris entre -1 et 1, une extrémité de pale monte au plus à 130 m et descend au moins à 50 m.

Réponse. a) $z_k = 90i + 40\,\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ · b) 110 m, 110 m et 50 m · c) de 50 m à 130 m.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : une configuration complète

a) $b - a = 3 + i$ et $c - a = 1 + 4i$, d'où

$$Z = \frac{1+4i}{3+i} = \frac{(1+4i)(3-i)}{10} = 0{,}7 + 1{,}1i$$

Z n'est pas réel (les points ne sont pas alignés), pas imaginaire pur (l'angle en A n'est pas droit) et $|Z| = \sqrt{1{,}7} \neq 1$ ($AB \neq AC$). Les côtés mesurent $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{17}$ et $BC = |-2+3i| = \sqrt{13}$; aucun n'est égal à un autre et $10 + 13 \neq 17$: le triangle est quelconque.

b) $\overline{(b-a)}(c-a) = (3-i)(1+4i) = 7 + 11i$, donc l'aire vaut $\frac{11}{2} = 5{,}5$.

c) $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_D = a + c - b = -1 + 4i$. **Vérification** : $c - z_D = 3 + i = b - a$. Le parallélogramme est formé de deux triangles superposables à ABC : son aire vaut 11.

Réponse. a) $Z = 0{,}7 + 1{,}1i$: ni réel, ni imaginaire pur, ni de module 1 — le triangle est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

quelconque · b) $A = 5{,}5$ · c) $z_D = -1 + 4i$, parallélogramme d'aire 11.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).