Plaquette 3 – Transformations : translation, homothétie, rotation et similitudes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois transformations de base.

transformation	écriture complexe
translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b	$z' = z + b$
homothétie de centre Ω, de rapport k réel non nul	$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$
rotation de centre Ω, d'angle θ	$z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - z_\Omega)$

Similitude directe. Toute application $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une **similitude directe** de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

— Si $a = 1$: c'est une **translation** de vecteur d'affixe b (sans point fixe si $b \neq 0$).

— Si $a \neq 1$: elle possède un **unique point fixe** Ω, d'affixe

$$z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$$

et s'écrit alors $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$.

Lecture de a, quand $a \neq 1$:

a	**nature**
réel, $a \neq 1$	homothétie de centre Ω et de rapport a
$a = -1$	symétrie de centre Ω
de module 1, $a \neq 1$	rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$
quelconque	similitude directe de centre Ω, de rapport $\lvert a\rvert$ et d'angle $\arg a$

Effet sur les figures. Une similitude directe de rapport k multiplie les longueurs par k, les aires par k^2, conserve les angles orientés, transforme une droite en droite et un cercle de rayon r en cercle de rayon kr.

Composition. La composée de $z' = a_1 z + b_1$ puis $z'' = a_2 z' + b_2$ est $z'' = a_2 a_1 z + a_2 b_1 + b_2$: les rapports se **multiplient**, les angles s'**ajoutent**.

Correction de l'exercice 1 – Translation : image et antécédent

a) Une translation de vecteur d'affixe b s'écrit $z' = z + b$; ici

$$z' = z - 1 + 4i$$

et l'image de $M(3 - 2i)$ a pour affixe $3 - 2i - 1 + 4i = 2 + 2i$.

b) On cherche z tel que $z - 1 + 4i = 5i$, soit $z = 1 + i$. **Vérification** : $(1 + i) - 1 + 4i = 5i$. Une translation de vecteur non nul n'a aucun point fixe ($z = z - 1 + 4i$ est impossible), et elle conserve les distances : $|z'_1 - z'_2| = |z_1 - z_2|$.

Réponse. a) $z' = z - 1 + 4i$ et $z_{M'} = 2 + 2i$ · b) l'antécédent de $5i$ est le point d'affixe $1 + i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Homothétie

a) L'homothétie de centre Ω et de rapport k s'écrit $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$:

$$z' - (1+i) = 3(z - 1 - i) \Leftrightarrow z' = 3z - 2 - 2i$$

Contrôle : le point fixe $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-2-2i}{-2} = 1 + i$ est bien Ω.

b) $z_{A'} = 3(2-i) - 2 - 2i = 4 - 5i$. **Vérification** : $z_{A'} - z_\Omega = 3 - 6i = 3(z_A - z_\Omega)$, ce qui confirme que Ω, A, A' sont alignés avec $\Omega A' = 3\,\Omega A$.

c) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2 : l'image a une aire de $5 \times 9 = 45$ cm².

Réponse. a) $z' = 3z - 2 - 2i$ · b) $z_{A'} = 4 - 5i$ · c) 45 cm².

Correction de l'exercice 3 – Rotation de centre O

a) La rotation de centre O et d'angle θ s'écrit $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$, et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$:

$$z' = iz$$

b) $i(3+2i) = -2 + 3i$, $i \times (-1) = -i$ et $i \times i = -1$. **Contrôle** : $|3+2i| = |-2+3i| = \sqrt{13}$, et $\dfrac{-2+3i}{3+2i} = i$, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

c) La rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ s'écrit $z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} z = -iz$. Composée avec la première, elle donne $z \mapsto -i \times iz = z$: les deux rotations sont réciproques l'une de l'autre.

Réponse. a) $z' = iz$ · b) $-2 + 3i$, $-i$ et -1 · c) $z' = -iz$.

Correction de l'exercice 4 – Rotation de centre quelconque

a) La rotation de centre Ω et d'angle θ s'écrit $z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - z_\Omega)$:

$$z' - 2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-2) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$$

Contrôle : le coefficient a a pour module 1, et $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 = z_\Omega$.

b) $z_A - z_\Omega = 2$, tourné de $\dfrac{\pi}{3}$, donne $1 + i\sqrt{3}$, d'où $z_{A'} = 3 + i\sqrt{3}$. Alors $\Omega A = 2$, $\Omega A' = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $AA' = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$: le triangle $\Omega A A'$ est équilatéral, comme tout triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 60°.

Réponse. a) $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$ · b) $z_{A'} = 3 + i\sqrt{3}$, et $\Omega A = \Omega A' = AA' = 2$: triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 5 – Reconnaître une rotation

L'écriture $z' = az + b$ avec $a = i$ et $b = 1 - i$: comme $a \neq 1$, il y a un unique point fixe, et comme $|a| = 1$, c'est une rotation, d'angle $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$. Son centre vérifie $z = iz + 1 - i$, soit $z(1-i) = 1 - i$:

$$z_\Omega = 1$$

f est la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. **Vérification** : l'image de 3 est $3i + 1 - i = 1 + 2i$, et par la définition, $z - z_\Omega = 2$ tourné d'un quart de tour donne $2i$, d'où $1 + 2i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. f est la rotation de centre Ω d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Reconnaître une homothétie et une symétrie

a) $a = 2$ est réel et différent de 1 : c'est une homothétie de rapport 2. Son centre vérifie $z = 2z - 3$, soit $z = 3$:

$$\text{homothétie de centre } \Omega(3) \text{ et de rapport } 2$$

Vérification : $5 \mapsto 7$, et $7 - 3 = 2 \times (5 - 3)$.

b) $a = -1$: c'est une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale (ou rotation d'angle π). Son centre vérifie $2z = 4 + 2i$, soit $z_\Omega = 2 + i$. **Vérification** : l'image de $5 + 3i$ est $-1 - i$, et le milieu de ces deux points est $\frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$.

Réponse. a) homothétie de centre $\Omega(3)$ et de rapport 2 · b) symétrie de centre $\Omega(2 + i)$ (homothétie de rapport -1, ou rotation d'angle π).

Correction de l'exercice 7 – Une similitude directe

Ici $a = 1 + i$ et $b = 0$: $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$. Comme a n'est ni réel ni de module 1, ce n'est ni une homothétie ni une rotation, mais une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$; son unique point fixe est O, puisque $z = (1 + i)z$ équivaut à $-iz = 0$. Elle est la composée, dans un ordre quelconque, de l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

$$z_{A'} = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$$

Contrôle : $\frac{OA'}{OA} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ et $\frac{z_{A'}}{z_A} = 1 + i$, d'argument $\frac{\pi}{4}$.

Réponse. Similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$; $z_{A'} = 3 + i$.

Correction de l'exercice 8 – Une similitude de centre non trivial

$a = 2i$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{2}$: c'est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son centre est le point fixe :

$$z = 2iz + 4 \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 4 \Leftrightarrow z = \frac{4(1 + 2i)}{5} = 0{,}8 + 1{,}6i$$

Vérification : $2i(0{,}8 + 1{,}6i) + 4 = 1{,}6i - 3{,}2 + 4 = 0{,}8 + 1{,}6i$. La transformation s'écrit $z' - z_\Omega = 2i(z - z_\Omega)$: elle multiplie les distances au centre par 2 (par exemple $0 \mapsto 4$, avec $\sqrt{3{,}2}$ puis $\sqrt{12{,}8}$, deux fois plus) et les aires par 4.

Réponse. Similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{4 + 8i}{5} = 0{,}8 + 1{,}6i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Composer deux rotations

a) En composant, $z'' = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)}z$: les arguments s'ajoutent.

$$z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$$

C'est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Deux rotations de même centre se composent en ajoutant leurs angles, dans n'importe quel ordre ; ce n'est plus vrai si les centres diffèrent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $r_1 \circ r_1 \circ r_1$ s'écrit $z \mapsto \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 z = \mathrm{e}^{i\pi} z = -z$: c'est la symétrie de centre O. En composant six fois r_1, on obtient $\mathrm{e}^{2i\pi} z = z$, l'identité : l'image d'un point décrit les sommets d'un hexagone régulier.

Réponse. a) $z'' = iz$: rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · b) $z''' = -z$: symétrie de centre O (rotation d'angle π).

Correction de l'exercice 10 – Composer une rotation et une translation

On écrit $r : z \mapsto iz$ et $t : z \mapsto z + 2$.

$t \circ r$ s'écrit $z \mapsto iz + 2$: $a = i$, c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, de centre $\frac{2}{1-i} = 1 + i$. $r \circ t$ s'écrit $z \mapsto i(z + 2) = iz + 2i$: c'est aussi une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, mais de centre

$$\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1 + i$$

Les deux composées ont le même angle mais des centres différents : elles ne sont pas égales, la composition n'est pas commutative. **Contrôle** : l'image de 0 est 2 par $t \circ r$ et $2i$ par $r \circ t$.

Réponse. $t \circ r$: rotation de centre $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · $r \circ t$: rotation de centre $-1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Elles sont différentes.

Correction de l'exercice 11 – Image d'un cercle

a) $a = 1 + i$ donne le rapport $\sqrt{2}$ et l'angle $\frac{\pi}{4}$. Le centre vérifie $z = (1 + i)z + 2$, soit $-iz = 2$, donc $z = 2i$. **Vérification** : $(1 + i)2i + 2 = 2i - 2 + 2 = 2i$.

b) Une similitude de rapport k transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon kr, dont le centre est l'image du centre. L'image de $A(1)$ est $(1 + i) + 2 = 3 + i$:

$$s(C) \text{ est le cercle de centre } A'(3 + i) \text{ et de rayon } 3\sqrt{2}$$

Contrôle : $M(4)$ est sur C ($|4 - 1| = 3$) ; son image $6 + 4i$ est à la distance $|3 + 3i| = 3\sqrt{2}$ de A'.

Réponse. a) similitude directe de centre $\Omega(2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ · b) le cercle de centre $3 + i$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Image d'une droite

On exprime z en fonction de z' : $z = \frac{z'}{i} = -iz'$. Avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, cela donne $x + iy = y' - ix'$, soit $x = y'$ et $y = -x'$. Le point M est sur D si $y = 2x + 1$, donc son image vérifie

$$-x' = 2y' + 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{x'}{2} - \frac{1}{2}$$

L'image de D est la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Les coefficients directeurs vérifient $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires, ce qui est normal pour un quart de tour. **Contrôle** : $A(0\,;1)$, d'affixe i, a pour image -1, et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Réponse. L'image est la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, perpendiculaire à D.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Construire la similitude à partir de deux points

On cherche $z' = az + b$ avec $a + b = 3 + i$ et $ai + b = 1 + 3i$. En soustrayant, $a(i - 1) = -2 + 2i = 2(i - 1)$, donc $a = 2$, puis $b = 3 + i - 2 = 1 + i$:

$$z' = 2z + 1 + i$$

Vérification : $2i + 1 + i = 1 + 3i$. Comme $a = 2$ est réel, s est une homothétie de rapport 2 ; son centre vérifie $z = 2z + 1 + i$, soit $z = -1 - i$. **Contrôle** : $z_{A'} - z_\Omega = 4 + 2i = 2(z_A - z_\Omega)$, et $A'B' = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2} = 2\,AB$.

Réponse. $z' = 2z + 1 + i$: homothétie de centre $\Omega(-1 - i)$ et de rapport 2.

Correction de l’exercice 14 – Une frise par rotations successives

a) r s’écrit $z \mapsto \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} z$: la suite est géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$, et $z_n = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{2n\pi}{5}}$.

b) Tous les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 3, et leurs arguments sont espacés de $\dfrac{2\pi}{5}$: ils partagent le cercle en cinq arcs égaux et forment un pentagone régulier. Son côté vaut $3\left|\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right| = 6\sin\dfrac{\pi}{5}$, d’où

$$P = 30\sin\frac{\pi}{5} \approx 17{,}634$$

un peu moins que le périmètre du cercle, $6\pi \approx 18{,}850$.

c) $z_{n+5} = z_n$ car $\mathrm{e}^{2i\pi} = 1$, et $2026 = 5 \times 405 + 1$: $z_{2026} = z_1 = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} \approx 0{,}927 + 2{,}853i$.

Réponse. a) $z_n = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{2n\pi}{5}}$ · b) pentagone régulier de périmètre $30\sin\dfrac{\pi}{5} \approx 17{,}634$ · c) $z_{2026} = z_1 = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Correction de l’exercice 15 – Un bras robotisé à deux segments

a) $3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ et, le second segment faisant l’angle $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$, $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. Donc

$$z_{\text{main}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i \qquad d = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{19} \approx 4{,}359 \text{ dm}$$

b) On factorise : $z_{\text{main}} = \mathrm{e}^{i\alpha}\left(3 + 2\,\mathrm{e}^{i\beta}\right)$, et comme $\left|\mathrm{e}^{i\alpha}\right| = 1$, la distance $|3 + 2\,\mathrm{e}^{i\beta}|$ ne dépend que de β. Par l’inégalité triangulaire, elle vaut au plus $3 + 2 = 5$ dm, avec égalité pour $\beta = 0$: bras tendu.

c) De même, $|3 + 2\,\mathrm{e}^{i\beta}| \geq 3 - 2 = 1$, avec égalité pour $\mathrm{e}^{i\beta} = -1$, soit $\beta = \pi$: bras replié. La main est alors au point d’affixe $\mathrm{e}^{i\alpha}(3 - 2) = \mathrm{e}^{i\alpha}$, à la distance 1 de O, et décrit le cercle de centre O et de rayon 1 dm quand α varie. La zone atteignable est la couronne entre les rayons 1 et 5 ; on retrouve bien $1 \leq \sqrt{19} \leq 5$.

Réponse. a) $z_{\text{main}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{7}{2}i$, à $\sqrt{19} \approx 4{,}359$ dm de l’épaule · b) 5 dm pour $\beta = 0$ (bras tendu) · c) 1 dm pour $\beta = \pi$; la main décrit alors le cercle de centre O et de rayon 1 dm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).