

Plaquette 3 - Transformations : translation, homothétie, rotation et similitudes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois transformations de base.

transformation	écriture complexe
translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b	$z' = z + b$
homothétie de centre Ω , de rapport k réel non nul	$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$
rotation de centre Ω , d'angle θ	$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

Similitude directe. Toute application $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une **similitude directe** de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

- Si $a = 1$: c'est une **translation** de vecteur d'affixe b (sans point fixe si $b \neq 0$).
- Si $a \neq 1$: elle possède un **unique point fixe** Ω , d'affixe

$$z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$$

et s'écrit alors $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$.

Lecture de a , quand $a \neq 1$:

a	nature
réel, $a \neq 1$	homothétie de centre Ω et de rapport a
$a = -1$	symétrie de centre Ω
de module 1, $a \neq 1$	rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$
quelconque	similitude directe de centre Ω , de rapport $ a $ et d'angle $\arg a$

Effet sur les figures. Une similitude directe de rapport k multiplie les longueurs par k , les aires par k^2 , conserve les angles orientés, transforme une droite en droite et un cercle de rayon r en cercle de rayon kr .

Composition. La composée de $z' = a_1z + b_1$ puis $z'' = a_2z' + b_2$ est $z'' = a_2a_1z + a_2b_1 + b_2$: les rapports se **multiplient**, les angles s'**ajoutent**.

Correction de l'exercice 1 - Translation : image et antécédent

- **a) Formule du cours** : une translation s'écrit $z' = z + b$, où b est l'affixe du vecteur ✓
- **Expression complexe** :

$$z' = z - 1 + 4i$$

- **Image de M** : on remplace z par $3 - 2i$ ✓
- **Calcul des parties réelles** : $3 - 1 = 2$ ✓
- **Calcul des parties imaginaires** : $-2 + 4 = 2$ ✓
- **Résultat** :

$$z_M = 2 + 2i$$

- **b) Question inverse** : on cherche z tel que $z' = 5i$ ✓
- **Équation** : $z - 1 + 4i = 5i$ ✓
- **On isole z** : $z = 5i + 1 - 4i$ ✓
- **Résultat** :

$$z = 1 + i$$

- **Vérification** : $(1 + i) - 1 + 4i = 5i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Remarque sur les points fixes** : $z = z - 1 + 4i$ donnerait $0 = -1 + 4i$, impossible ✓
- **Conclusion** : une translation de vecteur non nul n'a **aucun** point fixe ✓
- **Effet sur les longueurs** : $|z'_1 - z'_2| = |z_1 - z_2|$ ✓
- **Conséquence** : une translation conserve les distances, c'est une **isométrie** ✓
- **Lien avec la similitude** : ici $a = 1$, le rapport vaut 1 et l'angle 0 ✓

Réponse. a) $z' = z - 1 + 4i$ et $z_M = 2 + 2i$ · b) l'antécédent de $5i$ est le point d'affixe $1 + i$.

Correction de l'exercice 2 - Homothétie

- **a) Formule du cours** : $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$ ✓
- **Substitution** : $z' - (1 + i) = 3(z - 1 - i)$ ✓
- **Développement** : $z' = 3z - 3 - 3i + 1 + i$ ✓
- **Réduction** : $-3 + 1 = -2$ et $-3 + 1 = -2$ pour la partie imaginaire ✓
- **Expression complexe** :

$$z' = 3z - 2 - 2i$$

- **Contrôle** : le coefficient $a = 3$ est réel, c'est bien une homothétie ✓
- **Contrôle du centre** : $\frac{b}{1-a} = \frac{-2-2i}{1-3} = \frac{-2-2i}{-2} = 1 + i$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve z_Ω ✓
- **b) Image de A** : $3(2 - i) - 2 - 2i$ ✓
- **Développement** : $6 - 3i - 2 - 2i$ ✓
- **Résultat** :

$$z_{A'} = 4 - 5i$$

- **Vérification par la définition** : $z_A - z_\Omega = (2 - i) - (1 + i) = 1 - 2i$ ✓
- **On multiplie par 3** : $3 - 6i$ ✓
- **On ajoute z_Ω** : $3 - 6i + 1 + i = 4 - 5i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Contrôle d'alignement** : Ω, A, A' doivent être alignés ✓
- **Vérification** : $z_{A'} - z_\Omega = 3 - 6i = 3(z_A - z_\Omega)$ ✓
- **c) Effet sur les aires** : une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 ✓
- **Facteur** : $3^2 = 9$ ✓
- **Aire de l'image** :

$$5 \times 9 = 45 \text{ cm}^2$$

- **Effet sur les longueurs, pour comparaison** : elles sont multipliées par 3 seulement ✓

Réponse. a) $z' = 3z - 2 - 2i$ · b) $z_{A'} = 4 - 5i$ · c) 45 cm^2 .

Correction de l'exercice 3 - Rotation de centre O

— **a) Formule** : $z' = e^{i\theta} z$ pour une rotation de centre O ✓

— **Valeur de l'exponentielle** : $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ ✓

— **Expression complexe** :

$$z' = iz$$

— **À retenir** : multiplier par i , c'est faire un quart de tour dans le sens direct ✓

— **b) Premier point** : $i(3 + 2i) = 3i + 2i^2$ ✓

— **Simplification** : $-2 + 3i$ ✓

— **Deuxième point** : $i \times (-1) = -i$ ✓

— **Troisième point** : $i \times i = -1$ ✓

— **Résultats** :

$$3 + 2i \mapsto -2 + 3i \quad -1 \mapsto -i \quad i \mapsto -1$$

— **Contrôle des modules** : $|3 + 2i| = \sqrt{13}$ et $|-2 + 3i| = \sqrt{13}$ ✓

— **Cohérence** : une rotation conserve les distances à son centre ✓

— **Contrôle de l'angle** : $\frac{-2 + 3i}{3 + 2i}$ ✓

— **On multiplie par le conjugué** $3 - 2i$, dénominateur 13 ✓

— **Numérateur** : $(-2 + 3i)(3 - 2i) = -6 + 4i + 9i + 6 = 13i$ ✓

— **Quotient** : i , d'argument $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **c) Rotation d'angle opposé** : $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ ✓

— **Expression complexe** :

$$z' = -iz$$

— **Vérification** : la composée des deux rotations donne $z' = -i \times iz = z$ ✓

— **Cohérence** : ce sont bien deux transformations réciproques l'une de l'autre ✓

Réponse. a) $z' = iz$ · b) $-2 + 3i$, $-i$ et -1 · c) $z' = -iz$.

Correction de l'exercice 4 - Rotation de centre quelconque

— **a) Formule** : $z' - z_\Omega = e^{i\theta} (z - z_\Omega)$ ✓

— **Valeur de l'exponentielle** : $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Substitution** : $z' - 2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 2)$ ✓

— **Développement** : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 1 - i\sqrt{3} + 2$ ✓

— **Expression complexe** :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$$

— **Contrôle du module de a** : $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ✓

— **Cohérence** : c'est bien une rotation, pas une similitude de rapport différent de 1 ✓

— **Contrôle du centre** : $\frac{b}{1-a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ✓

— **Observation** : le numérateur vaut exactement 2 fois le dénominateur ✓

- **Quotient** : $2 \checkmark$
- **Cohérence** : on retrouve $z_{\Omega} = 2 \checkmark$
- **b) Image de A** : $z_A - z_{\Omega} = 4 - 2 = 2 \checkmark$
- **On multiplie par** $e^{i\frac{\pi}{3}}$: $2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \checkmark$
- **On ajoute** z_{Ω} : $1 + i\sqrt{3} + 2 \checkmark$
- **Résultat** :

$$z_{A'} = 3 + i\sqrt{3}$$

- **Vérification du triangle, premier côté** : $\Omega A = |2| = 2 \checkmark$
- **Deuxième côté** : $\Omega A' = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \checkmark$
- **Cohérence** : une rotation conserve la distance au centre $\checkmark$
- **Troisième côté** : $z_{A'} - z_A = (3 + i\sqrt{3}) - 4 = -1 + i\sqrt{3} \checkmark$
- **Module** : $AA' = \sqrt{1+3} = 2 \checkmark$
- **Conclusion** : les trois côtés valent 2, le triangle $\Omega AA'$ est **équilatéral** $\checkmark$
- **Explication** : un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 60° est équilatéral $\checkmark$

Réponse. a) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$ · b) $z_{A'} = 3 + i\sqrt{3}$, et $\Omega A = \Omega A' = AA' = 2$: triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître une rotation

- **Forme reconnue** : $z' = az + b$ avec $a = i$ et $b = 1 - i \checkmark$
- **Premier test** : $a \neq 1$, il existe donc un **unique point fixe** $\checkmark$
- **Module de a** : $|i| = 1 \checkmark$
- **Conclusion partielle** : le rapport vaut 1, c'est une **rotation** $\checkmark$
- **Argument de a** : $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \checkmark$
- **Angle de la rotation** : $\frac{\pi}{2} \checkmark$
- **Recherche du centre** : on résout $z = iz + 1 - i \checkmark$
- **On regroupe** : $z - iz = 1 - i \checkmark$
- **Factorisation** : $z(1 - i) = 1 - i \checkmark$
- **Simplification** : $1 - i \neq 0$, on peut diviser $\checkmark$
- **Centre** :

$$z_{\Omega} = 1$$

- **Formule générale, pour contrôle** : $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-i} = 1 \checkmark$
- **Cohérence** : conforme $\checkmark$
- **Conclusion** : f est la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2} \checkmark$
- **Vérification sur un point** : image de 3 $\checkmark$
- **Calcul** : $3i + 1 - i = 1 + 2i \checkmark$
- **Contrôle par la définition** : $z - z_{\Omega} = 2$, multiplié par i donne $2i \checkmark$
- **On ajoute le centre** : $1 + 2i \checkmark$
- **Cohérence** : conforme $\checkmark$
- **Contrôle des distances** : $\Omega(3) = 2$ et $|1 + 2i - 1| = 2 \checkmark$

Réponse. f est la rotation de centre Ω d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Reconnaître une homothétie et une symétrie

- **a) Lecture** : $a = 2$ et $b = -3$ ✓
 - **Nature de a** : réel, différent de 1 ✓
 - **Conclusion** : c'est une **homothétie** de rapport 2 ✓
 - **Point fixe** : $z = 2z - 3$ ✓
 - **Résolution** : $-z = -3$, donc $z = 3$ ✓
 - **Contrôle par la formule** : $\frac{-3}{1-2} = 3$ ✓
 - **Conclusion** :
homothétie de centre $\Omega(3)$ et de rapport 2
 - **Vérification** : image de 5 ✓
 - **Calcul** : $10 - 3 = 7$ ✓
 - **Contrôle** : $5 - 3 = 2$, doublé donne 4, plus 3 donne 7 ✓
 - **b) Lecture** : $a = -1$ et $b = 4 + 2i$ ✓
 - **Nature de a** : réel, égal à -1 ✓
 - **Conclusion** : homothétie de rapport -1 , c'est-à-dire une **symétrie centrale** ✓
 - **Point fixe** : $z = -z + 4 + 2i$ ✓
 - **Résolution** : $2z = 4 + 2i$ ✓
 - **Centre** :
$$z_{\Omega} = 2 + i$$
 - **Contrôle par la formule** : $\frac{4+2i}{1-(-1)} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ ✓
 - **Conclusion** : symétrie de centre $\Omega(2 + i)$ ✓
 - **Vérification** : image de $5 + 3i$ ✓
 - **Calcul** : $-(5 + 3i) + 4 + 2i = -1 - i$ ✓
 - **Contrôle par le milieu** : $\frac{(5 + 3i) + (-1 - i)}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ ✓
 - **Cohérence** : Ω est bien le milieu, conforme à une symétrie centrale ✓
 - **Remarque** : une symétrie centrale est aussi la rotation d'angle π de même centre ✓
- Réponse.** a) homothétie de centre $\Omega(3)$ et de rapport 2 · b) symétrie de centre $\Omega(2 + i)$ (homothétie de rapport -1 , ou rotation d'angle π).

Correction de l'exercice 7 - Une similitude directe

- **Lecture** : $a = 1 + i$ et $b = 0$ ✓
- **Module de a** : $|1 + i| = \sqrt{2} \approx 1,414$ ✓
- **Constat** : le module n'est ni 1 ni un réel, ce n'est ni une rotation ni une homothétie ✓
- **Conclusion** : c'est une **similitude directe** ✓
- **Rapport** : $\sqrt{2}$ ✓
- **Argument de a** : $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Angle** : $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Point fixe** : $z = (1 + i)z$ ✓
- **Regroupement** : $z(1 - (1 + i)) = 0$, soit $-iz = 0$ ✓
- **Solution** : $z = 0$ ✓
- **Centre** : l'origine O ✓
- **Conclusion** :

similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

- **Décomposition** : c'est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$, et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Ordre** : les deux se composent dans n'importe quel ordre, elles ont le même centre ✓
- **Image de A** : $(1+i)(2-i) = 2-i+2i+1$ ✓
- **Résultat** :

$$z_{A'} = 3 + i$$

- **Contrôle du rapport** : $OA = |2-i| = \sqrt{5}$ ✓
- **Et** : $OA' = |3+i| = \sqrt{10}$ ✓
- **Quotient** : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle de l'angle** : $\frac{z_{A'}}{z_A} = 1+i$, d'argument $\frac{\pi}{4}$ ✓
- **Cohérence** : conforme aux éléments annoncés ✓

Réponse. Similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$; $z_{A'} = 3 + i$.

Correction de l'exercice 8 - Une similitude de centre non trivial

- **Lecture** : $a = 2i$ et $b = 4$ ✓
- **Module de a** : $|2i| = 2$ ✓
- **Rapport de la similitude** : 2 ✓
- **Argument de a** : $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Angle** : $\frac{\pi}{2}$ ✓
- **Nature** : similitude directe, ni rotation (rapport $\neq 1$) ni homothétie (a non réel) ✓
- **Point fixe** : on résout $z = 2iz + 4$ ✓
- **Regroupement** : $z(1-2i) = 4$ ✓
- **Division** : $z = \frac{4}{1-2i}$ ✓
- **On multiplie par le conjugué $1+2i$** ✓
- **Dénominateur** : $1+4 = 5$ ✓
- **Numérateur** : $4(1+2i) = 4+8i$ ✓
- **Centre** :

$$z_{\Omega} = \frac{4+8i}{5} = 0,8 + 1,6i$$

- **Vérification** : $2i(0,8 + 1,6i) + 4 = 1,6i - 3,2 + 4 = 0,8 + 1,6i$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien un point fixe ✓
- **Conclusion** :

similitude directe de centre $\Omega(0,8 + 1,6i)$, de rapport 2 , d'angle $\frac{\pi}{2}$

- **Écriture réduite** : $z' - z_{\Omega} = 2i(z - z_{\Omega})$ ✓
- **Effet sur les aires** : elles sont multipliées par $2^2 = 4$ ✓
- **Contrôle sur un point** : image de 0 ✓
- **Calcul** : $z' = 4$ ✓
- **Distance au centre, avant** : $|0 - \Omega| = \sqrt{0,64 + 2,56} = \sqrt{3,2} \approx 1,789$ ✓
- **Distance au centre, après** : $|4 - \Omega| = |3,2 - 1,6i| = \sqrt{10,24 + 2,56} = \sqrt{12,8} \approx 3,578$ ✓

— **Quotient** : 2 ✓

Réponse. Similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{4+8i}{5} = 0,8 + 1,6i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Composer deux rotations

— **a) Expression de r_1** : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ ✓

— **Expression de r_2** : $z'' = e^{i\frac{\pi}{6}}z'$ ✓

— **Composition** : on remplace z' par son expression ✓

— **Calcul** : $z'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}z$ ✓

— **Règle des exponentielles** : les arguments s'ajoutent ✓

— **Somme** : $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Expression complexe** :

$$z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$$

— **Identification** : rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Règle générale** : deux rotations de **même centre** se composent en additionnant les angles ✓

— **Remarque** : l'ordre n'a pas d'importance ici ✓

— **Attention** : ce n'est plus vrai si les centres diffèrent ✓

— **b) Composée triple** : $z''' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 z$ ✓

— **Moivre** : l'argument est multiplié par 3 ✓

— **Calcul** : $3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$ ✓

— **Expression** :

$$z''' = e^{i\pi}z = -z$$

— **Identification** : c'est la **symétrie de centre O** ✓

— **Autre lecture** : c'est la rotation de centre O et d'angle π ✓

— **Contrôle** : en composant six fois r_1 , on obtient $e^{i2\pi}z = z$ ✓

— **Conclusion** : r_1 est d'**ordre** 6, six quarts... six sixièmes de tour ramènent à l'identité ✓

— **Illustration** : l'image d'un point décrit un hexagone régulier ✓

Réponse. a) $z'' = iz$: rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · b) $z''' = -z$: symétrie de centre O (rotation d'angle π).

Correction de l'exercice 10 - Composer une rotation et une translation

— **Expression de r** : $z' = iz$ ✓

— **Expression de t** : $z'' = z' + 2$ ✓

— **Composée $t \circ r$** : on applique r d'abord ✓

— **Substitution** : $z'' = iz + 2$ ✓

— **Lecture** : $a = i$, de module 1 ✓

— **Nature** : rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Centre** : $z_\Omega = \frac{2}{1-i}$ ✓

— **On multiplie par le conjugué** : $\frac{2(1+i)}{2} = 1+i$ ✓

— **Conclusion** :

$t \circ r$ est la rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

— **Composée** $r \circ t$: on applique t d'abord ✓

— **Substitution** : $z' = i(z+2) = iz + 2i$ ✓

— **Lecture** : $a = i$, même angle $\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Centre** : $z_{\Omega'} = \frac{2i}{1-i}$ ✓

— **On multiplie par le conjugué** : $\frac{2i(1+i)}{2} = i(1+i) = -1+i$ ✓

— **Conclusion** :

$r \circ t$ est la rotation de centre $\Omega'(-1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

— **Comparaison** : même angle, mais **centres différents** ✓

— **Réponse** : les deux composées ne sont **pas** égales ✓

— **Conclusion générale** : la composition de transformations n'est pas commutative ✓

— **Vérification sur un point** : image de 0 par $t \circ r$ ✓

— **Calcul** : $i \times 0 + 2 = 2$ ✓

— **Image de 0 par** $r \circ t$: $i(0+2) = 2i$ ✓

— **Cohérence** : $2 \neq 2i$, les deux applications diffèrent bien ✓

— **Remarque utile** : la composée d'une rotation d'angle $\theta \neq 0$ et d'une translation est **toujours** une rotation de même angle ✓

Réponse. $t \circ r$: rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · $r \circ t$: rotation de centre $-1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Elles sont différentes.

Correction de l'exercice 11 - Image d'un cercle

— **a) Lecture** : $a = 1+i$ et $b = 2$ ✓

— **Module** : $\sqrt{2}$, c'est le rapport ✓

— **Argument** : $\frac{\pi}{4}$, c'est l'angle ✓

— **Point fixe** : $z = (1+i)z + 2$ ✓

— **Regroupement** : $z(1-1-i) = 2$, soit $-iz = 2$ ✓

— **Division** : $z = \frac{2}{-i}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{1}{-i} = i$, donc $z = 2i$ ✓

— **Centre** : $\Omega(2i)$ ✓

— **Vérification** : $(1+i)(2i) + 2 = 2i - 2 + 2 = 2i$ ✓

— **Conclusion** :

s est la similitude directe de centre $\Omega(2i)$, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$

— **b) Propriété** : l'image d'un cercle par une similitude de rapport k est un cercle de rayon $k \times r$ ✓

— **Nouveau rayon** : $3\sqrt{2} \approx 4,243$ ✓

— **Nouveau centre** : c'est l'image de A ✓

— **Calcul** : $(1+i) \times 1 + 2 = 3+i$ ✓

— **Conclusion** :

$s(C)$ est le cercle de centre $A'(3 + i)$ et de rayon $3\sqrt{2}$

- **Contrôle sur un point du cercle** : M d'affixe 4, car $|4 - 1| = 3$ ✓
- **Image** : $(1 + i) \times 4 + 2 = 6 + 4i$ ✓
- **Distance à A'** : $|6 + 4i - 3 - i| = |3 + 3i|$ ✓
- **Module** : $3\sqrt{2}$ ✓
- **Cohérence** : l'image est bien sur le cercle annoncé ✓
- **Contrôle de l'aire** : l'aire passe de 9π à 18π , soit un facteur $2 = (\sqrt{2})^2$ ✓

Réponse. a) similitude directe de centre $\Omega(2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. b) le cercle de centre $3 + i$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Image d'une droite

- **Expression de r** : $z' = iz$ ✓
 - **Méthode** : exprimer z en fonction de z' , puis reporter dans l'équation ✓
 - **Relation inverse** : $z = \frac{z'}{i} = -iz'$ ✓
 - **Justification** : $\frac{1}{i} = -i$ ✓
 - **On pose** : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ ✓
 - **Calcul** : $-i(x' + iy') = -ix' + y'$ ✓
 - **Identification** : $x = y'$ et $y = -x'$ ✓
 - **Équation de départ** : $y = 2x + 1$ ✓
 - **Substitution** : $-x' = 2y' + 1$ ✓
 - **On isole y'** : $2y' = -x' - 1$ ✓
 - **Équation de l'image** :
- $$y' = -\frac{x'}{2} - \frac{1}{2}$$
- **Nature** : c'est bien une **droite**, conformément au cours ✓
 - **Coefficient directeur de départ** : 2 ✓
 - **Coefficient directeur de l'image** : $-\frac{1}{2}$ ✓
 - **Produit** : $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ ✓
 - **Interprétation** : les deux droites sont **perpendiculaires** ✓
 - **Cohérence** : une rotation d'un quart de tour transforme une droite en une droite perpendiculaire ✓
 - **Contrôle sur un point** : $A(0; 1)$ appartient à D ✓
 - **Affixe** : i ✓
 - **Image** : $i \times i = -1$, soit le point $(-1; 0)$ ✓
 - **Test dans l'équation image** : $-\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓
 - **Cohérence** : conforme ✓

Réponse. L'image est la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, perpendiculaire à D .

Correction de l'exercice 13 - Construire la similitude à partir de deux points

- **Forme cherchée** : $z' = az + b$ ✓
- **Première condition** : $a \times 1 + b = 3 + i$ ✓

- **Seconde condition** : $a \times i + b = 1 + 3i$ ✓
- **Soustraction des deux** : $a(i - 1) = (1 + 3i) - (3 + i)$ ✓
- **Second membre** : $-2 + 2i$ ✓
- **Donc** : $a = \frac{-2 + 2i}{i - 1}$ ✓
- **Observation** : $-2 + 2i = 2(i - 1)$ ✓
- **Simplification** :

$$a = 2$$

- **Retour à la première condition** : $2 + b = 3 + i$ ✓
- **Donc** : $b = 1 + i$ ✓
- **Expression complexe** :

$$z' = 2z + 1 + i$$

- **Vérification sur B** : $2i + 1 + i = 1 + 3i$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Nature** : $a = 2$ est **réel**, c'est donc une **homothétie** ✓
- **Rapport** : 2 ✓
- **Angle** : $\arg(2) = 0$ ✓
- **Point fixe** : $z = 2z + 1 + i$ ✓
- **Résolution** : $-z = 1 + i$, donc $z = -1 - i$ ✓
- **Centre** : $\Omega(-1 - i)$ ✓
- **Conclusion** : homothétie de centre $\Omega(-1 - i)$ et de rapport 2 ✓
- **Contrôle d'alignement** : Ω, A, A' doivent être alignés ✓
- **Vérification** : $z_A - z_\Omega = 2 + i$ et $z_{A'} - z_\Omega = 4 + 2i = 2(2 + i)$ ✓
- **Cohérence** : conforme ✓
- **Contrôle des longueurs** : $AB = |i - 1| = \sqrt{2}$ et $A'B' = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ ✓

Réponse. $z' = 2z + 1 + i$: homothétie de centre $\Omega(-1 - i)$ et de rapport 2.

Correction de l'exercice 14 - Une frise par rotations successives

- **a) Expression de r** : $z' = e^{i\frac{2\pi}{5}}z$ ✓
- **Suite géométrique** : de raison $q = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et de premier terme 3 ✓
- **Formule** :

$$z_n = 3e^{i\frac{2n\pi}{5}}$$

- **Module** : $|z_n| = 3$ pour tout n ✓
- **Conséquence** : tous les points sont sur le cercle de centre O et de rayon 3 ✓
- **b) Arguments** : ils sont espacés de $\frac{2\pi}{5}$ exactement ✓
- **Conséquence** : les cinq points partagent le cercle en cinq arcs égaux ✓
- **Conclusion** : $M_0M_1M_2M_3M_4$ est un **pentagone régulier** ✓
- **Longueur d'un côté** : $M_0M_1 = |z_1 - z_0| = 3\left|e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right|$ ✓
- **Formule de l'angle moitié** : $|1 - e^{i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ ✓
- **Ici** : $2\sin\frac{\pi}{5}$ ✓
- **Longueur** : $6\sin\frac{\pi}{5}$ ✓
- **Valeur** : $\sin\frac{\pi}{5} \approx 0,587785$ ✓

— **Côté** : $\approx 3,527$ ✓

— **Périmètre** :

$$P = 30 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 17,634$$

— **Contrôle** : le périmètre du cercle vaut $6\pi \approx 18,850$ ✓

— **Cohérence** : le pentagone inscrit a un périmètre plus petit ✓

— **c) Périodicité** : $z_{n+5} = z_n$, car $e^{i2\pi} = 1$ ✓

— **Division euclidienne** : $2026 = 5 \times 405 + 1$ ✓

— **Donc** : $z_{2026} = z_1$ ✓

— **Résultat** :

$$z_{2026} = 3 e^{i\frac{2\pi}{5}} \approx 0,927 + 2,853 i$$

— **Contrôle du module** : $\sqrt{0,859 + 8,140} \approx 3$ ✓

Réponse. a) $z_n = 3 e^{i\frac{2n\pi}{5}}$ · b) pentagone régulier de périmètre $30 \sin \frac{\pi}{5} \approx 17,634$ · c)

$$z_{2026} = z_1 = 3 e^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

Correction de l'exercice 15 - Un bras robotisé à deux segments

— **a) Premier terme** : $3 e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ ✓

— **Calcul** : $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ✓

— **Angle du second segment** : $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ✓

— **Second terme** : $2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ ✓

— **Somme, partie réelle** : $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598$ ✓

— **Somme, partie imaginaire** : $\frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ ✓

— **Affixe de la main** :

$$z_{\text{main}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i$$

— **Distance à l'origine** : $\sqrt{\frac{27}{4} + \frac{49}{4}}$ ✓

— **Somme sous la racine** : $\frac{76}{4} = 19$ ✓

— **Résultat** :

$$d = \sqrt{19} \approx 4,359 \text{ dm}$$

— **b) Mise en facteur** : $z_{\text{main}} = e^{i\alpha}(3 + 2 e^{i\beta})$ ✓

— **Module** : $|e^{i\alpha}| = 1$, donc $d = |3 + 2 e^{i\beta}|$ ✓

— **Constat important** : la distance ne dépend **que** de β ✓

— **Inégalité triangulaire** : $|3 + 2 e^{i\beta}| \leq 3 + 2 = 5$ ✓

— **Cas d'égalité** : les deux termes doivent avoir le même argument ✓

— **Condition** : $e^{i\beta} = 1$, donc $\beta = 0$ ✓

— **Distance maximale** :

$$d_{\text{max}} = 5 \text{ dm} \quad \text{pour} \quad \beta = 0$$

— **Interprétation** : le bras est **tendu**, les deux segments alignés dans le même sens ✓

- **c) Minoration** : $|3 + 2e^{i\beta}| \geq 3 - 2 = 1 \checkmark$
- **Cas d'égalité** : $e^{i\beta} = -1$, donc $\beta = \pi \checkmark$
- **Distance minimale** : 1 dm $\checkmark$
- **Interprétation** : le bras est **replié**, le second segment revient sur le premier $\checkmark$
- **Quand α varie** : $z_{\text{main}} = e^{i\alpha} \times 1$, de module constant 1 $\checkmark$
- **Conclusion** : la main décrit le **cercle** de centre O et de rayon 1 dm $\checkmark$
- **Zone atteignable** : l'ensemble des positions possibles est la **couronne** comprise entre les cercles de rayons 1 et 5 $\checkmark$
- **Vérification sur le a)** : $\beta = \frac{\pi}{3}$ donne $|3 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}| = |3 + 1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{16 + 3} = \sqrt{19} \checkmark$
- **Cohérence** : conforme, et $1 \leq \sqrt{19} \leq 5 \checkmark$

Réponse. a) $z_{\text{main}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i$, à $\sqrt{19} \approx 4,359$ dm de l'épaule · b) 5 dm pour $\beta = 0$ (bras tendu) · c) 1 dm pour $\beta = \pi$; la main décrit alors le cercle de centre O et de rayon 1 dm.