Plaquette 2 – Angles orientés : alignement, orthogonalité et cocyclicité

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

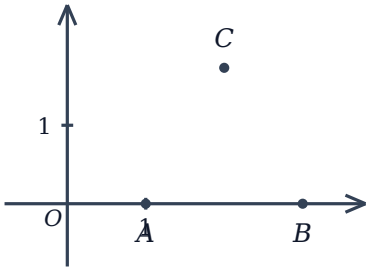
Exercices

Méthode

Tout le chapitre tient dans une seule formule : l'**argument d'un quotient de différences d'affixes est un angle orienté**. À partir de là, chaque configuration devient un test à faire sur un nombre complexe — alignement si le quotient est réel, orthogonalité s'il est imaginaire pur, égalité de longueurs si son module vaut 1. On calcule donc le quotient, puis on lit sa nature : c'est la seule méthode de la plaquette, mais elle répond à toutes les questions.

Exercice 1 – Un angle et un rapport de longueurs

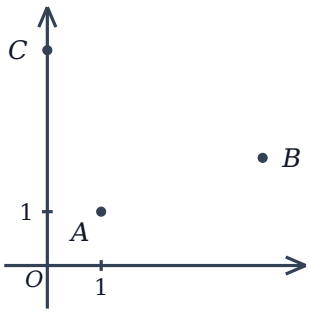
On donne A, B, C d'affixes 1, 3 et $2 + i\sqrt{3}$. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et le rapport $\dfrac{AC}{AB}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?



Les points A, B et C

Exercice 2 – Tester une orthogonalité

Soit A, B, C d'affixes $1 + i$, $4 + 2i$ et $4i$. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Préciser sa nature exacte.



Les points A, B et C

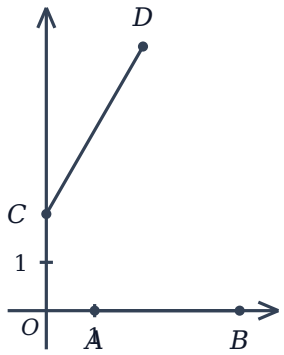
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Tester un alignement

Soit A, B, C d'affixes $1+2i$, $3+5i$ et $-1-i$. Démontrer que ces trois points sont alignés, et préciser la position de A sur le segment $[BC]$.

Exercice 4 – Angle entre deux droites

On donne $A(1)$, $B(4)$, $C(2i)$ et $D\left(2i+2+2i\sqrt{3}\right)$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$, puis l'angle géométrique entre les droites (AB) et (CD), en degrés.



Les points A, B, C et D

Exercice 5 – Quatre points cocycliques

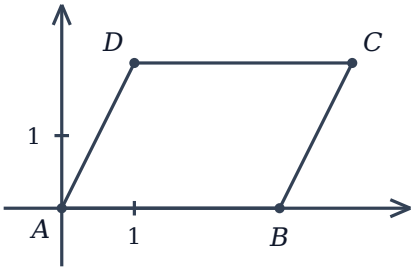
Soit A, B, C, D d'affixes 1, -1, i et $-i$. Démontrer, en utilisant le birapport, que ces quatre points sont cocycliques. Retrouver le résultat autrement.

Exercice 6 – Le cercle de diamètre AB

Soit A et B deux points distincts, et M un point distinct de A et B. Démontrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ est imaginaire pur.

Exercice 7 – Nature d'un quadrilatère

Soit A, B, C, D d'affixes 0, 3, $4+2i$ et $1+2i$. Déterminer la nature précise du quadrilatère $ABCD$.



Les points A, B, C et D

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Un angle non remarquable

Soit $A(2+i)$, $B(5+2i)$ et $C(3+4i)$. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique, puis donner une valeur approchée en degrés de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, arrondie au dixième.

Exercice 9 – Triangle équilatéral direct

On donne $A(2+i)$ et $B(5+i)$. Déterminer l'affixe du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral **direct**, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 10 – Une caractérisation élégante

Soit $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que ABC est équilatéral direct si et seulement si $z_A + j z_B + j^2 z_C = 0$.

a) Vérifier cette caractérisation sur le triangle de sommets 1, j^2 et j.

b) Le triangle de sommets 0, 2 et $1 + i\sqrt{3}$ est-il équilatéral direct ou indirect ?

Exercice 11 – Trois points et un cercle

Soit $A(1)$, $B(i)$, $C(-1)$ et $D(2)$. Les quatre points sont-ils cocycliques ? Justifier de deux façons.

Exercice 12 – Un lieu d'angle constant

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, distincts de 1, tels que $\arg\left(\dfrac{z-1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π.

Exercice 13 – Orthocentre et cercle

Soit A, B, C trois points du cercle unité, d'affixes a, b, c de module 1. On pose $h = a + b + c$ et on note H le point d'affixe h.

Démontrer que $(AH) \perp (BC)$, lorsque $H \neq A$ et $B \neq C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

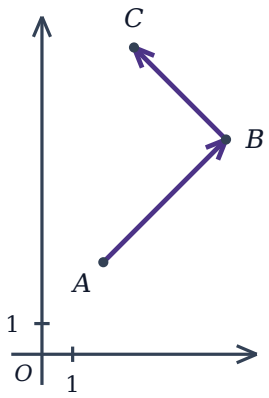
Exercice 14 – Cap et changement de cap

Un bateau navigue dans un plan muni d'un repère orthonormé gradué en milles nautiques, l'axe des ordonnées pointant vers le nord. Il part du point A d'affixe $2 + 3i$ et rejoint le point B d'affixe $6 + 7i$, puis met le cap sur C d'affixe $3 + 10i$.

a) Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et la distance AB.

b) Calculer $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$, puis en déduire l'angle de changement de cap en B, en degrés.

c) Le virage se fait-il vers bâbord (gauche) ou tribord (droite) ?



Le trajet du bateau, du nord vers le haut

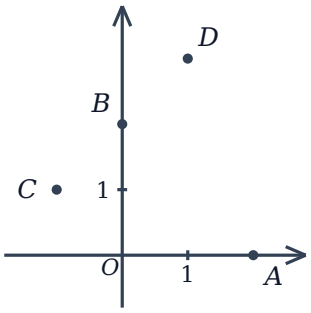
Exercice 15 – Bilan : une configuration complète

Soit A, B, C d'affixes $a = 2$, $b = 2i$ et $c = -1 + i$.

a) Déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit et son rayon.

c) Le point D d'affixe $1 + 3i$ est-il sur ce cercle ? Justifier par un calcul d'angle.



Les points A, B, C et D

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).